

FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

Po teoriji Furijeovih redova, svaki periodičan signal možemo predstaviti zbirom beskonačno mnogo ortogonalnih funkcija. Budući da predstava signala preko Furijeovog reda omogućava potpuno drugačiji uvid u karakteristike signala u odnosu na vremenski domen, prirodno se postavlja pitanje da li je moguće ideju razlaganja signala na njegove prostoperiodične komponente proširiti i na neperiodične signale. Posmatrajući neperiodičan signal kao periodičan signal sa beskonačno velikim periodom, Furijeova transformacija proširuje ovakav koncept razlaganja signala i na neperiodične signale.

Prilikom sinteze periodičnog signala na osnovu koeficijenata Furijeovog reda u zbiru učestvuje beskonačno mnogo prostoperiodičnih funkcija, ali je neophodno naglasiti da se njihove učestanosti međusobno razlikuju za konačan iznos i da je razlika susjednih učestanosti jednaka osnovnoj učestanosti signala. Prema tome, spektar periodičnih signala se računa za diskretne vrijednosti učestanosti. Proširujući ovaj koncept na neperiodične signale uvođenjem beskonačno velikog perioda, osnovna učestanost signala postaje infinitezimala, a samim tim se i razlike između susjednih učestanosti beskonačno smanjuju, te spektar postaje kontinualna funkcija učestanosti.

6.1 Prelaz sa Furijeovog reda na Furijeovu transformaciju

Posmatrajmo neperiodičan signal dat na Slici 6.1(a). Formirajmo periodično proširenje dijela ovog signala sa intervala $t_1 < t < t_2$, sa periodom $T_0 = t_2 - t_1$, kao na Slici 6.1(b), tako da vrijedi:

$$\tilde{x}(t) \equiv x(t), \quad t_1 < t < t_2, \quad (6.1)$$

$$\tilde{x}(t_1) = \frac{1}{2} [x(t_{1+}) - x(t_{1-})], \quad (6.2)$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + nT_0), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

Furijeov red tako dobijenog periodičnog signala je dat sa:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.4)$$

gdje su koeficijenti Furijeovog reda:

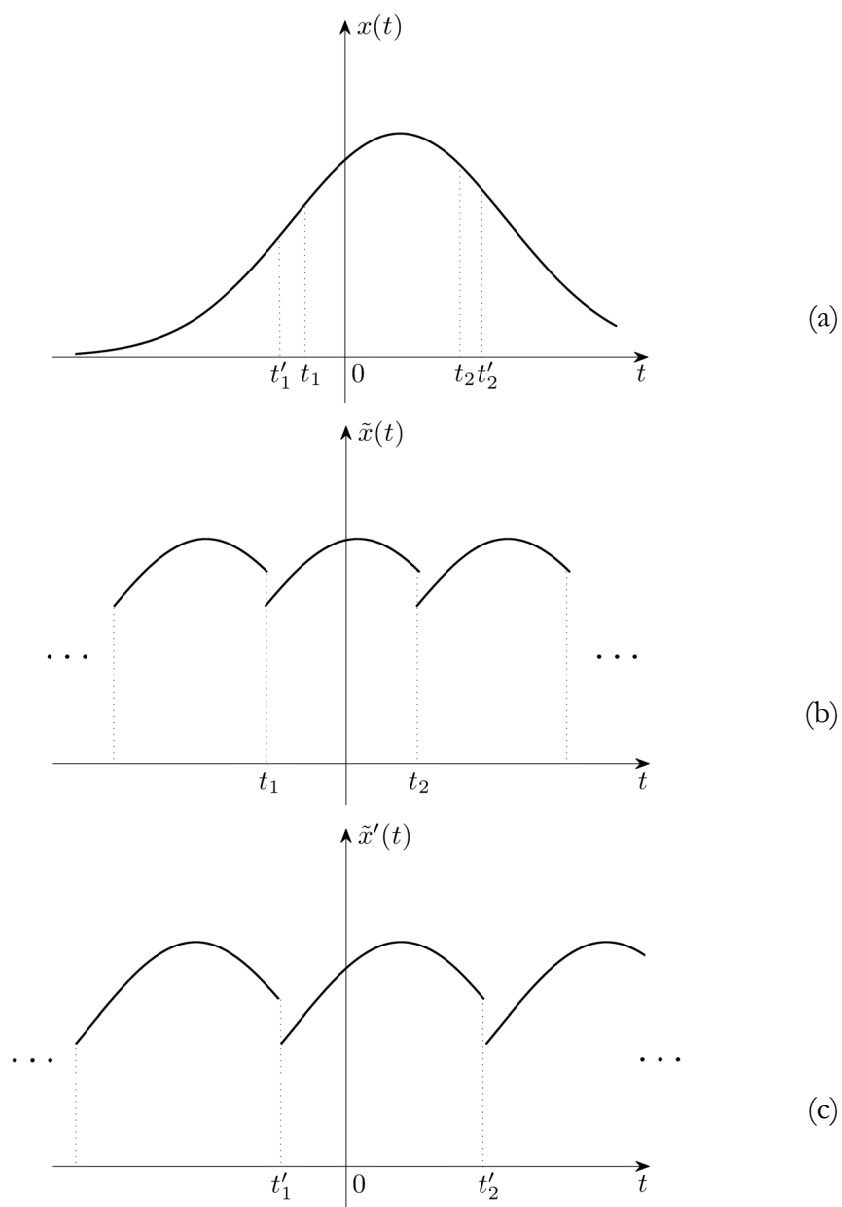
$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

Ako formiram novo periodično proširenje sa periodom $T'_0 > T_0$, $T'_0 = t'_2 - t'_1$, dobijamo Furijeov red u obliku:

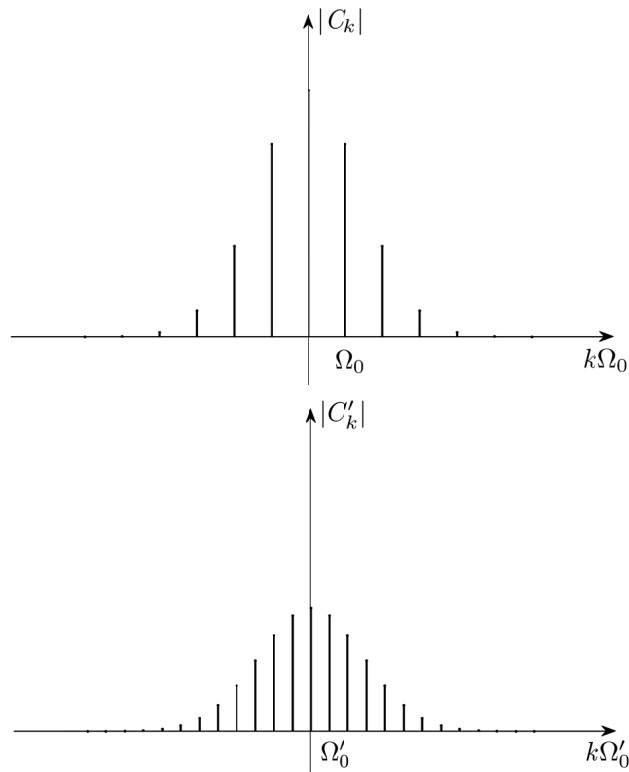
$$\tilde{x}'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{jk\Omega'_0 t}, \quad \Omega'_0 = \frac{2\pi}{T'_0} \quad (6.6)$$

sa koeficijentima:

$$C'_k = \frac{1}{T'_0} \int_{t'_0} \tilde{x}'(t) e^{-jk\Omega'_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.7)$$



Slika 6.1 (a) Kontinualan neperiodičan signal; (b) i (c) njegova periodična proširenja.



Slika 6.2 Promjena koeficijenta Furijeovog reda pri povećanju perioda periodičnog proširenja signala.

U graničnom slučaju kada $t_1 \rightarrow -\infty$, $t_2 \rightarrow \infty$ i $T_0 \rightarrow \infty$ ovako formirano periodično proširenje signala postaje neperiodičan signal, $\Omega_0 \rightarrow d\Omega$ i $k\Omega_0$ postaje kontinualna varijabla Ω , te je:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_k = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{\Omega_0}{2\pi} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (6.8)$$

U ovom graničnom slučaju koeficijenti Furijeovog reda postaju funkcija kontinualne varijable Ω i njihove vrijednosti postaju infinitezimale. Na Slici 6.2 je ilustrovano šta se dešava sa koeficijentima Furijeovog reda pri promjeni osnovnog perioda signala. Amplitudni spektar postaje gušći, a vrijednosti modula koeficijenta Furijeovog reda se smanjuju.

Stoga umjesto koeficijenta Furijevog reda C_k ima smisla posmatrati proizvod $C_k \cdot T_0$. Taj proizvod je u graničnom slučaju jednak:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_k \cdot T_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad (6.9)$$

što vodi definiciji *Furijeove transformacije* (*Fourier Transform – FT*) kontinualnih signala, koju primjenjujemo u analizi neperiodičnih signala:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (6.10)$$

Na osnovu (6.9) i (6.10) veza između Furijeove transformacije i koeficijenta Furijevog reda je data sa:

$$X(\Omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_k \cdot T_0, \quad (6.11)$$

ili, na osnovu (6.8) i (6.10), sa:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_k = \frac{d\Omega}{2\pi} X(\Omega). \quad (6.12)$$

Periodičan signal sa beskonačno velikim periodom ($T_0 \rightarrow \infty$) se može shvatiti kao neperiodičan signal, pa vrijedi:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (6.13)$$

Dobijeni izraz:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (6.14)$$

omogućava sintezu signala na osnovu poznate Furijeove transformacije i naziva se *inverzna Furijeova transformacija*.

Neophodno je naglasiti da, za razliku od izraza za sintezu periodičnih signala, gdje se sumiraju elementarne kompleksne eksponencijalne funkcije čije su frekvencije umnožak osnovne frekvencije periodičnog signala, u izrazu za sintezu neperiodičnih signala učestanosti elementarnih kompleksnih eksponencijalnih funkcija koje grade signal pripadaju kontinuumu realnih brojeva, te kažemo da je spektar neperiodičnih signala kontinualan.

Dakle, *Furijev transformacioni par* je dat sa:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad (6.15)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (6.16)$$

Često koristimo sljedeći način označavanja za direktnu:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (6.17)$$

i inverznu Furijeovu transformaciju:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}, \quad (6.18)$$

dok Furijev transformacioni par označavamo sa:

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega). \quad (6.19)$$

Vrlo često domen definisanosti signala (vremenski domen) nazivamo originalni, a domen definisanosti Furijeove transformacije frekvencijski ili transformacioni domen.

Za egzistenciju Furijeove transformacije dovoljno je da signal:

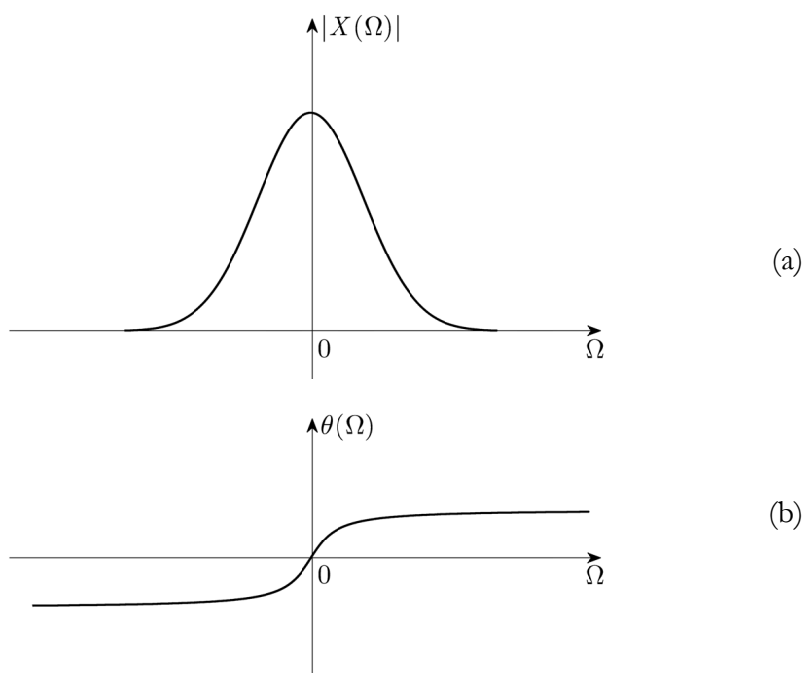
1. bude apsolutno integrabilan:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-j\Omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty;$$

2. ima konačan broj ekstremnih vrijednosti (minimuma i maksimuma) u proizvoljno odabranom konačnom intervalu;
3. ima konačan broj diskontinuiteta (prekida prvog reda) u proizvoljno odbranom konačnom intervalu.

Ovi uslovi su ekvivalentni Dirihleovim uslovima kod Furijevog reda.

Uslov apsolutne integrabilnosti je dovoljan za egzistenciju Furijeove transformacije većine fizičkih signala. Međutim, uslov apsolutne integrabilnosti nije i potreban uslov, jer postoje signali koji nisu apsolutno integrabilni, npr.



Slika 6.3 Primjer (a) amplitudnog i (b) faznog spektra neperiodičnog signala.

Dirakova funkcija, sinusni i drugi periodični signali, ali za koje se ipak može odrediti Furijeova transformacija, kao što ćemo to kasnije vidjeti.

Fizički gledano, ovako definisana Furijeova transformacija daje frekvencijsku predstavu kontinualnog neperiodičnog signala. Ona u članovima $\frac{1}{2\pi} X(\Omega) d\Omega$ sadrži informaciju o amplitudama i fazama beskonačno mnogo elementarnih funkcija oblika $e^{j\Omega t}$ na koje se razlaže kontinualni signal $x(t)$. Modul Furijeove transformacije $|X(\Omega)|$ određuje amplitude elementarnih funkcija pa se naziva *amplitudni spektar signala*, a argument $\theta(\Omega) = \arg X(\Omega)$ je *fazni spektar signala* jer utiče na fazne pomake elementarnih funkcija. Na Slici 6.3 ilustrovan je način grafičkog prikaza spektra neperiodičnih signala.

Furijeova transformacija signala nije jedan-jedan preslikavanje. Naime, Furijeove transformacije dva signala koji zadovoljavaju Dirihleove uslove, a razlikuju se samo u konačnom broju izolovanih singulariteta (prekidnih tačaka)

su jednake, jer na vrijednost integrala $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$ ne utiče konačan broj vrijednosti u izolovanim tačkama. Međutim, prilikom rekonstrukcije signala inverznom Furijeovom transformacijom u tačkama diskontinuiteta t_0 se dobija:

$$\frac{1}{2}[x(t_{0-}) + x(t_{0+})], \quad (6.20)$$

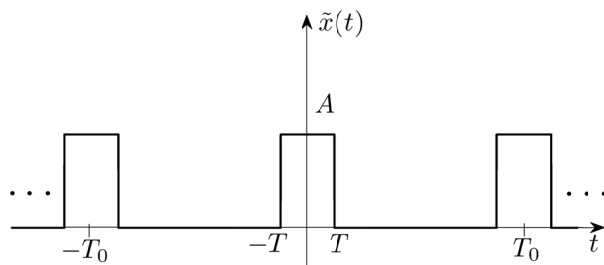
jer zbog kontinualnosti kompleksne eksponencijalne funkcije $e^{j\Omega t}$ vrijedi da je:

$$\begin{aligned} x(t_{0-}) + x(t_{0+}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{-j\Omega t_{0-}} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{-j\Omega t_{0+}} d\Omega = \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{-j\Omega t_0} d\Omega = 2x(t_0). \end{aligned} \quad (6.21)$$

U praktičnim aplikacijama smatramo da je Furijeov transformacioni par jedinstveno određen, jer fizički ostvarljivi signali nemaju izolovane singularitete.

Primjer 6.1:

Odrediti koeficijente Furijeovog reda za povorku pravougaonih impulsa datu na Slici 6.4. Posmatrati šta se dešava prilikom promjene perioda datog signala crtajući koeficijente Furijeovog reda za $T_0 = \frac{1}{2}$, $T_0 = 1$ i $T_0 = 2$, ako je $T = \frac{1}{20}$.



Slika 6.4 Periodičan signal u obliku povorku pravougaonih impulsa.

Rješenje:

U Primjeru 5.3 smo odredili koeficijente Furijeovog reda datog signala:

$$C_k = \frac{2AT}{T_0} \operatorname{sinc} k 2\pi \frac{T}{T_0}, \quad k \neq 0 \quad (6.22)$$

$$C_0 = 2A \frac{T}{T_0}. \quad (6.23)$$

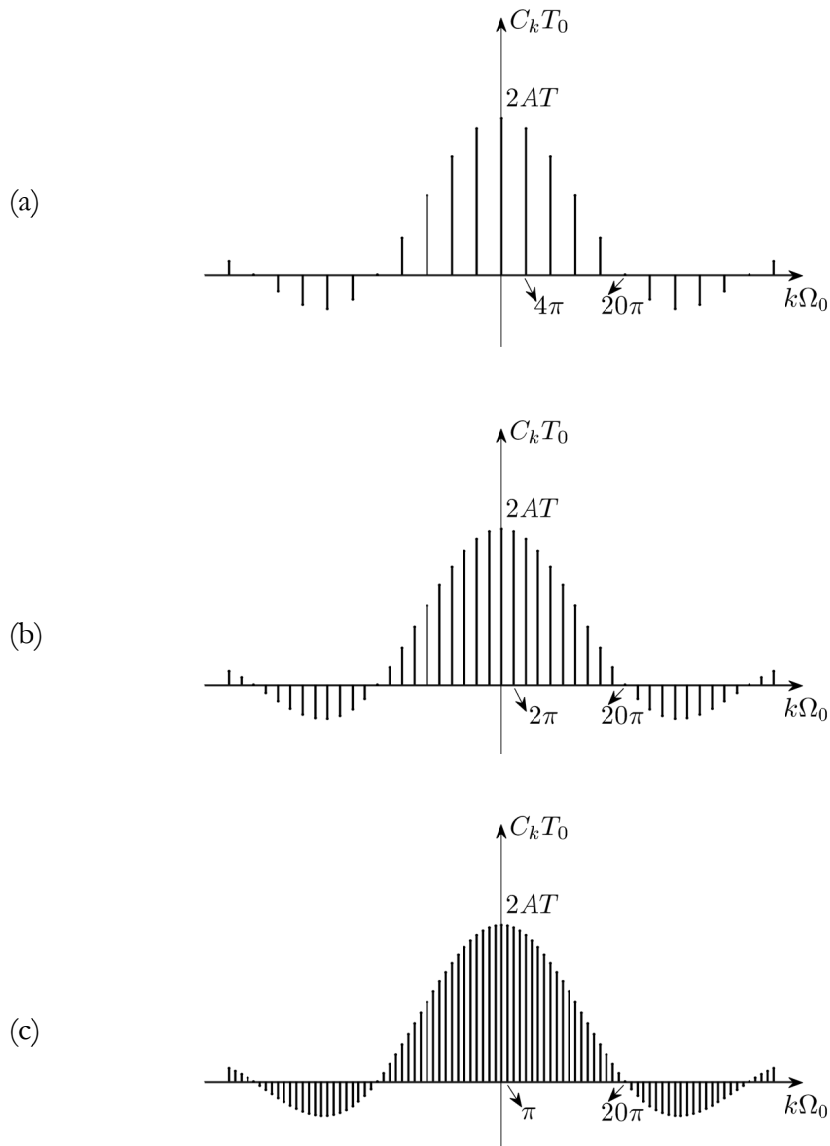
Položaj nula u spektru signala $k\Omega_0 = \frac{n\pi}{T}$, $n \in Z$ se ne mijenja povećavanjem perioda signala T_0 .

Razmak koeficijenata Furijeovog reda je $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Sa porastom perioda T_0 taj razmak se smanjuje, što je ilustrovano na Slici 6.5. U graničnom slučaju, kada $T_0 \rightarrow \infty$, razmak frekvencijskih komponenti postaje beskonačno mali, što znači da frekvencijske komponente postaju kontinualna funkcija učestanosti.

Pri tome se vrijednosti koeficijenata Furijeovog reda smanjuju, i u navedenom graničnom slučaju postaju infinitezimale. Međutim, proizvod $C_k \cdot T_0$ i Furijeova transformacija neperiodičnog signala koji se dobije povećavanjem perioda do beskonačnosti $X(\Omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_k \cdot T_0$ imaju konačne vrijednosti. Najlakše je to uočiti posmatrajući nulti koeficijent Furijeovog reda $C_0 = 2A \frac{T}{T_0}$ koji teži nuli pri beskonačnom povećanju perioda, dok je vrijednost Furijeove transformacije za nultu učestanost:

$$X(0) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_0 \cdot T_0 = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2AT}{T_0} \cdot T_0 = 2AT, \quad (6.24)$$

konstantna pri povećanju perioda T_0 .



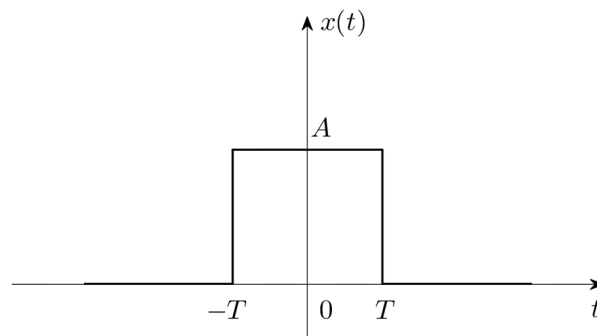
Slika 6.5 Uticaj promjene perioda signala na izgled amplitudnog spektra:

(a) $T = \frac{1}{20}$, $T_0 = \frac{1}{2}$; (b) $T = \frac{1}{20}$, $T_0 = 1$ i (c) $T = \frac{1}{20}$, $T_0 = 2$.

□

Primjer 6.2:

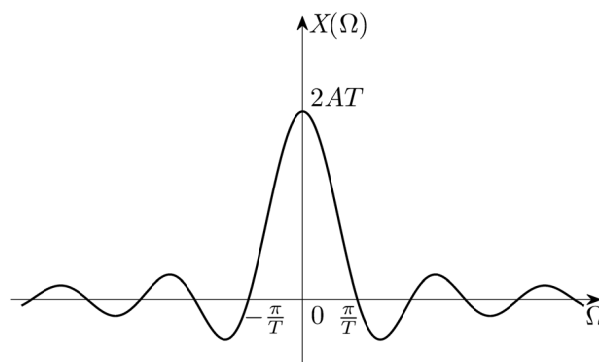
Odrediti Furijeovu transformaciju signala datog na Slici 6.6. Nacrtati amplitudni spektar signala.



Slika 6.6 Neperiodičan signal u obliku pravougaonog impulsa.

Rješenje:

Dati signal je granični slučaj signala sa Slike 6.4, kada $T_0 \rightarrow \infty$. Prema tome, njegov spektar je granični slučaj spektra sa Slike 6.5, pri čemu $k\Omega_0$ postaje kontinualna varijabla Ω . Spektar signala prikazan je na Slici 6.7.



Slika 6.7 Furijeova transformacija pravougaonog impulsa.

Računajući na osnovu definicionog izraza za Furijeovu transformaciju dobijamo:

$$\begin{aligned}
 X(\Omega) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-T}^T Ae^{-j\Omega t} dt = \\
 &= -\frac{A}{j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-T}^T = \frac{2A}{j\Omega} \cdot \frac{e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}}{2} = \\
 &= 2AT \frac{\sin \Omega T}{\Omega T} = 2AT \operatorname{sinc} \Omega T.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Nule spektra signala se nalaze na učestanostima:

$$\Omega = \frac{k\pi}{T}, \quad k \in Z. \tag{6.26}$$

□

6.2 Furijeova transformacija kompleksnih signala

U praksi se najčešće radi sa realnim signalima, iako se ponekad ukazuje potreba za formiranjem kompleksnih signala u vremenu, njihovom analizom i obradom. Prilikom definisanja Furijeove transformacije nismo postavljali uslove da signal u vremenu bude realan. Stoga isti definicioni izraz za Furijeovu transformaciju možemo primijeniti i na kompleksne signale. Dakle, Furijeova transformacija kompleksnog signala:

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t) \tag{6.27}$$

je data sa:

$$X(\Omega) = X_r(\Omega) + jX_i(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t) + jx_i(t)] [\cos(\Omega t) - j \sin(\Omega t)] dt. \tag{6.28}$$

Relani i imaginarni dijelovi Furijeove transformacije su:

$$X_r(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t)\cos(\Omega t) + x_i(t)\sin(\Omega t)] dt, \quad (6.29)$$

$$X_i(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [-x_r(t)\sin(\Omega t) + x_i(t)\cos(\Omega t)] dt. \quad (6.30)$$

Ako je realni dio signala u vremenu parna, a imaginarni neparna funkcija, imaginarni dio Furijeove transformacije će biti jednak nuli, jer je proizvod parne i neparne funkcije neparna funkcija, a integral neparne funkcije od $-\infty$ do ∞ je jednak nuli. Slično, ako je realni dio signala u vremenu neparna, a imaginarni parna funkcija, realni dio Furijeove transformacije će biti jednak nuli.

Iz relacija (6.28-30) lako se izvode specijalni oblici Furijevog integrala koji uspostavljaju vezu između realnih i imaginarnih dijelova Furijeove transformacije sa parnim i neparnim dijelovima signala u vremenu i obrnuto. Mi ćemo se zadržati na tim vezama razmatrajući samo realne vremenske signale nešto kasnije.

Kada radimo analizu kompleksnih signala u vremenskom domenu, onda je potrebno razmotriti i spektar konjugovano kompleksnih signala. Konjugovana Furijeova transformacija je data sa:

$$X^*(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\Omega t} dt. \quad (6.31)$$

Ako potražimo reflektovanu konjugovanu Furijeovu transformaciju:

$$X^*(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad (6.32)$$

vidimo da ona zapravo predstavlja Furijeovu transformaciju konjugovano kompleksnog signala:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad (6.33)$$

pa zaključujemo da je:

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\Omega). \quad (6.34)$$

6.3 Furijeova transformacija realnih signala

U ovom poglavlju ćemo razmotriti osnovne osobine spektara realnih signala. Napišimo definicioni izraz za Furijeovu transformaciju pod pretpostavkom da je signal u vremenu realan:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (6.35)$$

Tada vrijedi:

$$X^*(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\Omega t} dt, \quad (6.36)$$

$$X(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\Omega t} dt. \quad (6.37)$$

Iz jednakosti (6.36) i (6.37) jasno slijedi da je:

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega). \quad (6.38)$$

Budući da je:

$$|X^*(\Omega)| = |X(\Omega)|, \quad (6.39)$$

$$\arg X^*(\Omega) = -\arg X(\Omega), \quad (6.40)$$

zaključujemo da je amplitudni spektar realnog signala parna, a fazni spektar neparna funkcija učestanosti:

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)|, \quad (6.41)$$

$$\arg X(-\Omega) = -\arg X(\Omega). \quad (6.42)$$

Sada ćemo lako izvesti zaključke za realni i imaginarni dio Furijeove transformacije realnih signala. Označimo fazni spektar signala sa $\varphi(\Omega) = \arg X(\Omega)$. Zbog parnosti amplitudnog i neparnosti faznog spektra, realni dio Furijeove transformacije realnih signala:

$$\operatorname{Re}\{X(\Omega)\} = |X(\Omega)| \cos \varphi(\Omega) \quad (6.43)$$

je parna funkcija, dok je imaginarni dio Furijeove transformacije realnih signala:

$$\operatorname{Im}\{X(\Omega)\} = |X(\Omega)| \sin \varphi(\Omega) \quad (6.44)$$

neparna funkcija učestanosti.

Pokazaćemo sada da je Furijeova transformacija parnih realnih signala realna, dok je Furijeova transformacija neparnih realnih signala čisto imaginarna.

Svaki signal može da se razloži na njegov parni $\mathcal{P}\{x(t)\}$ i neparni $\mathcal{N}\{x(t)\}$ dio (vidjeti 2.3):

$$x(t) = \mathcal{P}\{x(t)\} + \mathcal{N}\{x(t)\}. \quad (6.45)$$

Posmatrajmo sada Furijeove transformacije parnog i neparnog dijela signala:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{P}\{x(t)\} + \mathcal{N}\{x(t)\}] [\cos(\Omega t) - j \sin(\Omega t)] dt = X_r(\Omega) + jX_i(\Omega). \quad (6.46)$$

Furijeova transformacija parnog dijela signala:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}\{x(t)\} \cos(\Omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}\{x(t)\} \sin(\Omega t) dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}\{x(t)\} \cos(\Omega t) dt, \end{aligned} \quad (6.47)$$

je realna:

$$X_r(\Omega) = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{P}\{x(t)\} \cos(\Omega t) dt, \quad (6.48)$$

jer je integral neparne funkcije $\mathcal{P}\{x(t)\} \sin(\Omega t)$ jednak nuli. Za Furijeovu transformaciju neparnog dijela signala na sličan način se dobije da je čisto imaginarna:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}\{x(t)\} \cos(\Omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}\{x(t)\} \sin(\Omega t) dt = \\ & = -j \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}\{x(t)\} \sin(\Omega t) dt, \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$X_i(\Omega) = -2 \int_0^{\infty} \mathcal{N}\{x(t)\} \sin(\Omega t) dt. \quad (6.50)$$

6.4 Osobine Furijeove transformacije

Analiza signala u frekvencijskom domenu se pojednostavljuje ukoliko poznajemo osobine Furijeove transformacije. U odjeljcima koji slijede dokazaćemo i dati primjere korišćenja osnovnih osobina Furijeove transformacije. Zbog široke primjenljivosti u rješavanju konkretnih problema, ove osobine se često nazivaju pravila Furijeove transformacije.

6.4.1 Simetrija

Ukoliko signal u vremenu funkcionalnog oblika $x(t)$ (npr. pravougaoni impuls) ima spektar funkcionalnog oblika $X(\Omega)$ (u posmatranom primjeru to je sinc funkcija), onda spektar signala koji u vremenu ima funkcionalni oblik $X(t)$ (sinc funkcija u posmatranom primjeru) poprima oblik reflektovanog originalnog signala (pravougaonog impulsa u posmatranom primjeru) pomnoženog sa 2π . Dakle, ako postoji transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, tada je:

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\Omega). \quad (6.51)$$

Dokaz:

Kako je Furijeova transformacija data sa $X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$, onda jednostavnom zamjenom varijabli t i Ω dobijamo:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\Omega)e^{-j\Omega t} d\Omega. \quad (6.52)$$

Potražimo inverznu Furijeovu transformaciju od $2\pi x(-\Omega)$:

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi x(-\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \Bigg|_{-\Omega \rightarrow \Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\Omega)e^{-j\Omega t} d\Omega, \quad (6.53)$$

Poredeći (6.52) i (6.53) dobijamo:

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi x(-\Omega)\} = X(t). \quad (6.54)$$

□

Primjer 6.3:

Određiti i nacrtati Furijeove transformacije Dirakovog impulsa $x(t) = \delta(t)$ i konstante $x(t) = 1$.

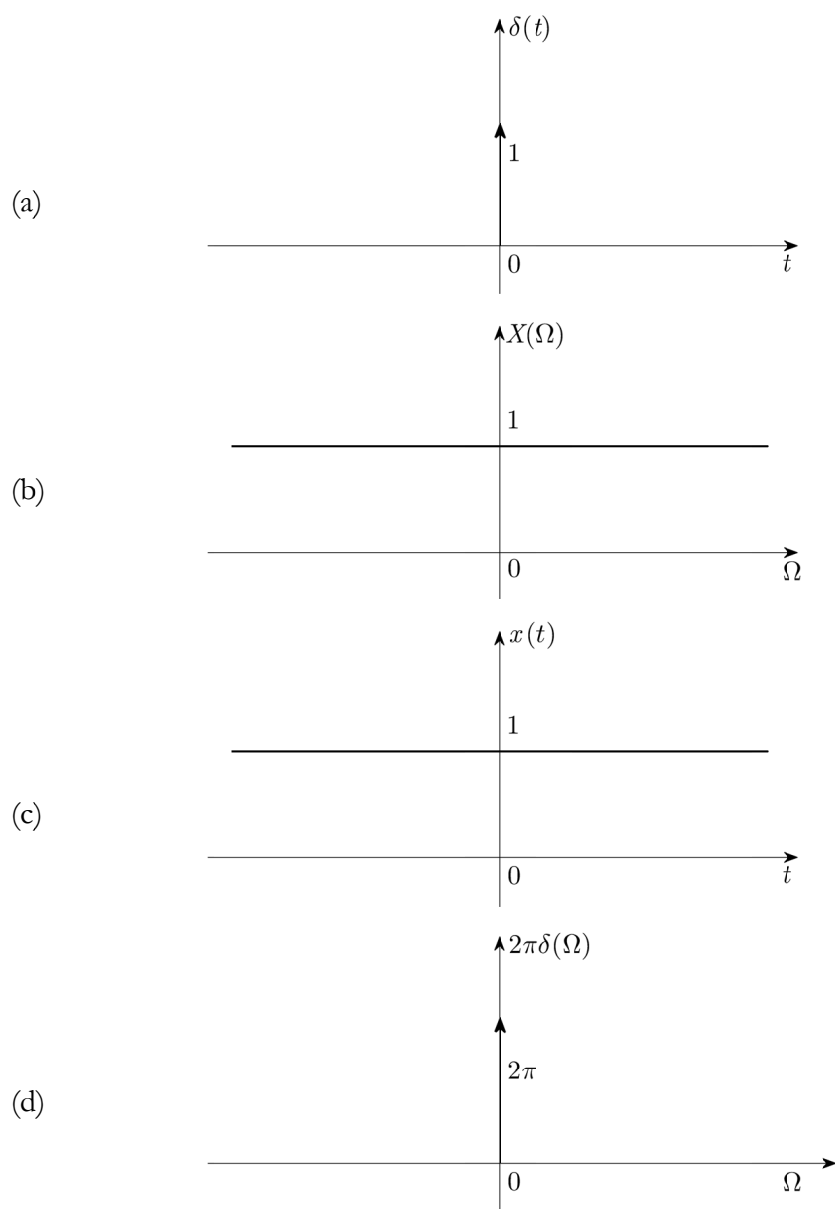
Rješenje:

Polazeći od definicionog izraza za Furijeovu transformaciju i koristeći svojstvo odabiranja Dirakove funkcije dobijamo Furijeovu transformaciju Dirakovog impulsa:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\Omega \cdot 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (6.55)$$

Dirakova funkcija je realna i parna, pa je njen spektar paran i realan.

Furijeovu transformaciju konstante $x(t) = 1$ pronaći ćemo koristeći osobinu simetrije Furijeove transformacije:



Slika 6.8 (a) Dirakova funkcija i (b) njena Furijeova transformacija;
(c) konstanta i (d) njena Furijeova transformacija.

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\Omega) = 2\pi\delta(\Omega). \quad (6.56)$$

Na Slici 6.8 prikazani su spektri Dirakovog impulsa i konstante. Primjećujemo da se u spektru konstante pojavljuje beskonačno velika vrijednost u vidu Dirakove funkcije. Bez uvođenja Dirakove funkcije ne bismo bili u mogućnosti da odredimo spektar konstante, jer konstanta nije apsolutno integrabilan signal i direktno računanje njene Furijeove transformacije preko definicionog izraza nije moguće. Takođe zaključujemo da je spektar konstante paran i realan.

□

6.4.2 Linearnost

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega)$ i $x_2(t) \leftrightarrow X_2(\Omega)$, tada je Furijeova transformacija linearne kombinacije signala jednaka na isti način formiranoj linearnoj kombinaciji njihovih Furijeovih transformacija:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}. \quad (6.57)$$

Dokaz:

Budući da je integral linearni operator, direktno slijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [ax_1(t) + bx_2(t)] e^{-j\Omega t} dt = \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\Omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\Omega t} dt = aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega). \end{aligned} \quad (6.58)$$

□

6.4.3 Pomak u vremenskom domenu

Ako je $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, tada pomjeranje signala u vremenu za t_0 vremenskih jedinica ima za posljedicu množenje spektra kompleksnom eksponencijalnom funkcijom $e^{-j\Omega t_0}$:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(\Omega). \quad (6.59)$$

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza, Furijeovu transformaciju signala pomjerenog u vremenu dobijamo u obliku:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\Omega t} dt \Big|_{t-t_0=\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Omega \tau} e^{-j\Omega t_0} d\tau = \\ &= e^{-j\Omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau = e^{-j\Omega t_0} X(\Omega). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Budući da je $|e^{-j\Omega t_0}| = 1$, zaključujemo da se amplitudni spektar signala ne mijenja prilikom pomjeranja signala u vremenu:

$$|e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)| = |e^{-j\Omega t_0}| |X(\Omega)| = |X(\Omega)|. \quad (6.61)$$

□

Primjer 6.4:

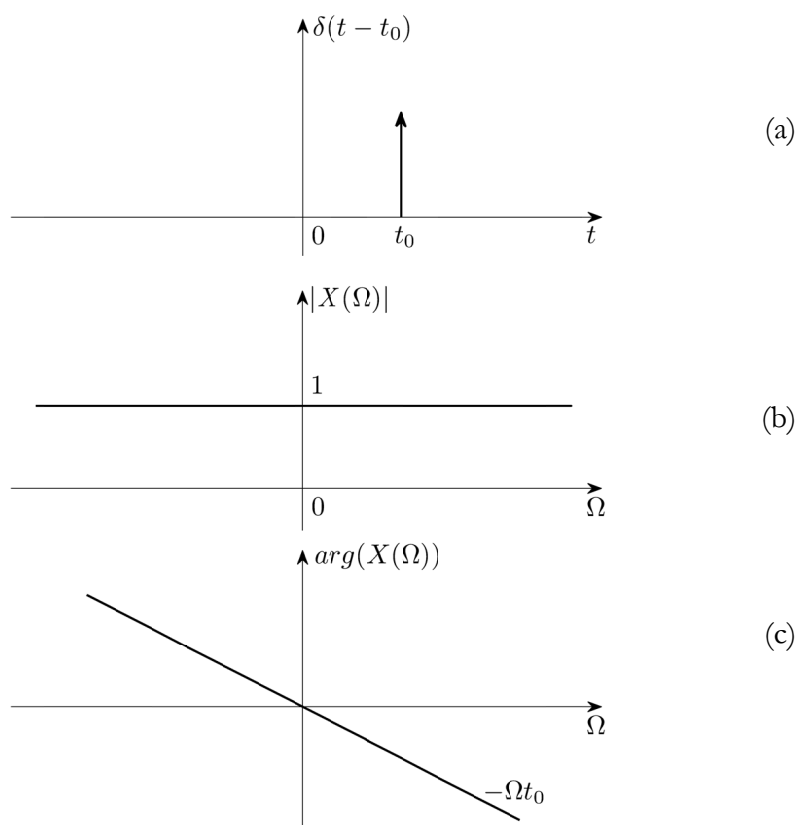
Odrediti i nacrtati spektar pomjerenog Dirakovog impulsa $\delta(t - t_0)$.

Rješenje:

Znajući da je $\delta(t) \leftrightarrow 1$, koristeći pravilo pomaka u vremenskom domenu direktno dobijamo:

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow 1 \cdot e^{-j\Omega t_0}. \quad (6.62)$$

Amplitudni i fazni spektar pomjerenog Dirakovog impulsa dati su na Slici 6.9.



Slika 6.9 (a) Pomjereni Dirakov impuls, (b) njegov amplitudni i (c) fazni spektar.

Primjećujemo da je zbog pomaka u vremenskom domenu došlo do promjene faznog spektra, dok je amplitudni spektar ostao isti.

□

Primjer 6.5:

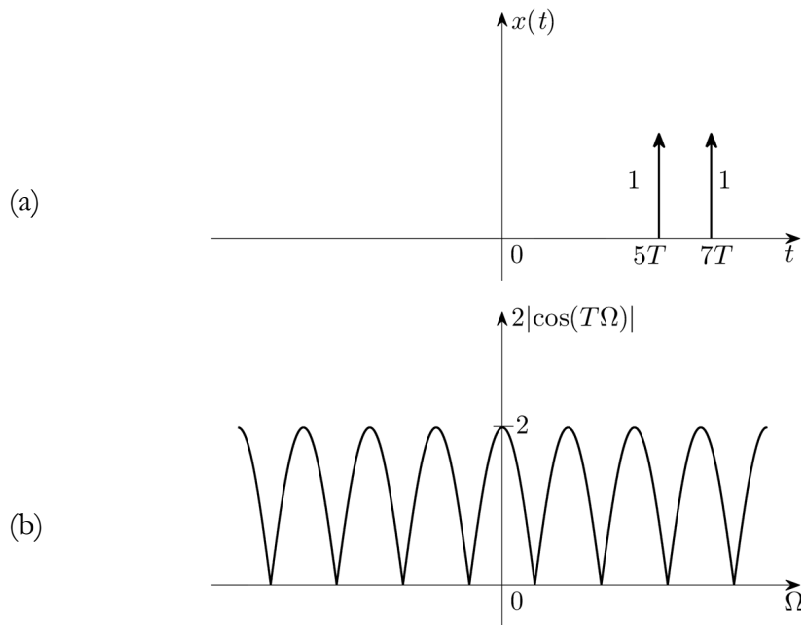
Odrediti Furijeovu transformaciju signala $x(t) = \delta(t - 5T) + \delta(t - 7T)$, te nacrtati njegov amplitudni spektar.

Rješenje:

Koristeći osobinu linearnosti, a zatim osobinu pomaka u vremenskom domenu, dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(t-5T) + \delta(t-7T)\} &= \mathcal{F}\{\delta(t-5T)\} + \mathcal{F}\{\delta(t-7T)\} = e^{-j5T\Omega} + e^{-j7T\Omega} \\ &= 2e^{-j6T\Omega} \frac{e^{jT\Omega} + e^{-jT\Omega}}{2} = 2e^{-j6T\Omega} \cos T\Omega. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Budući da se radi o realnom signalu njegov amplitudni spektar je paran. Zadani signal i njegov amplitudni spektar prikazani su na Slici 6.10.



Slika 6.10 (a) Dva pomjerena Dirakova impulsa i (b) njihov amplitudni spektar.

□

6.4.4 Pomak u frekvencijskom domenu

Ako je $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, množenje signala u vremenu sa kompleksnom eksponencijalnom funkcijom $e^{j\Omega_0 t}$ ima za posljedicu pomjeranje spektra po frekvencijskoj osi za Ω_0 :

$$x(t) \cdot e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0). \quad (6.64)$$

Dokaz:

Potražimo Furijeovu transformaciju od $x(t) \cdot e^{j\Omega_0 t}$:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot e^{j\Omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\Omega - \Omega_0)\tau} d\tau. \quad (6.65)$$

Isti rezultat ćemo dobiti ako u definicionom izrazu za Furijeovu transformaciju zamijenimo Ω sa $\Omega - \Omega_0$, što znači da je:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot e^{j\Omega_0 t}\} = X(\Omega - \Omega_0). \quad (6.66)$$

□

Primjer 6.6:

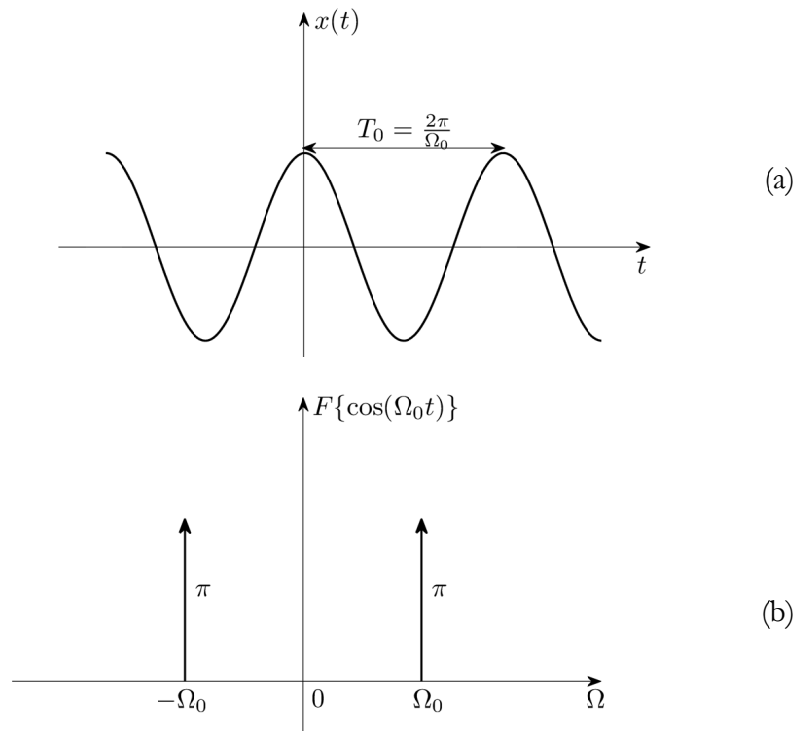
Odrediti i nacrtati Furijeovu transformaciju signala $x(t) = \cos \Omega_0 t$.

Rješenje:

Od ranije znamo da je $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$. Koristeći osobinu linearnosti i osobinu pomaka u frekvencijskom domenu dobijamo:

$$\mathcal{F}\{\cos \Omega_0 t\} = \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 t}\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{-j\Omega_0 t}\} = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0). \quad (6.67)$$

Kosinusoida i njena Furijeova transformacija prikazane su na Slici 6.11.



Slika 6.11 (a) Kosinusoida i (b) njena Furijeova transformacija.

□

6.4.5 Skaliranje

Proširivanje ili sužavanje (jednom riječju skaliranje) signala u jednom domenu dovodi do sužavanja odnosno proširivanja signala u drugom domenu. Ako je $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, onda vrijedi:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (6.68)$$

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza za Furijeovu transformaciju imamo:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\Omega t} dt \Big|_{at \rightarrow p} = \frac{1}{a} \int_{-a\cdot\infty}^{a\cdot\infty} x(p)e^{-j\Omega \frac{p}{a}} dp. \quad (6.69)$$

Za $a < 0$:

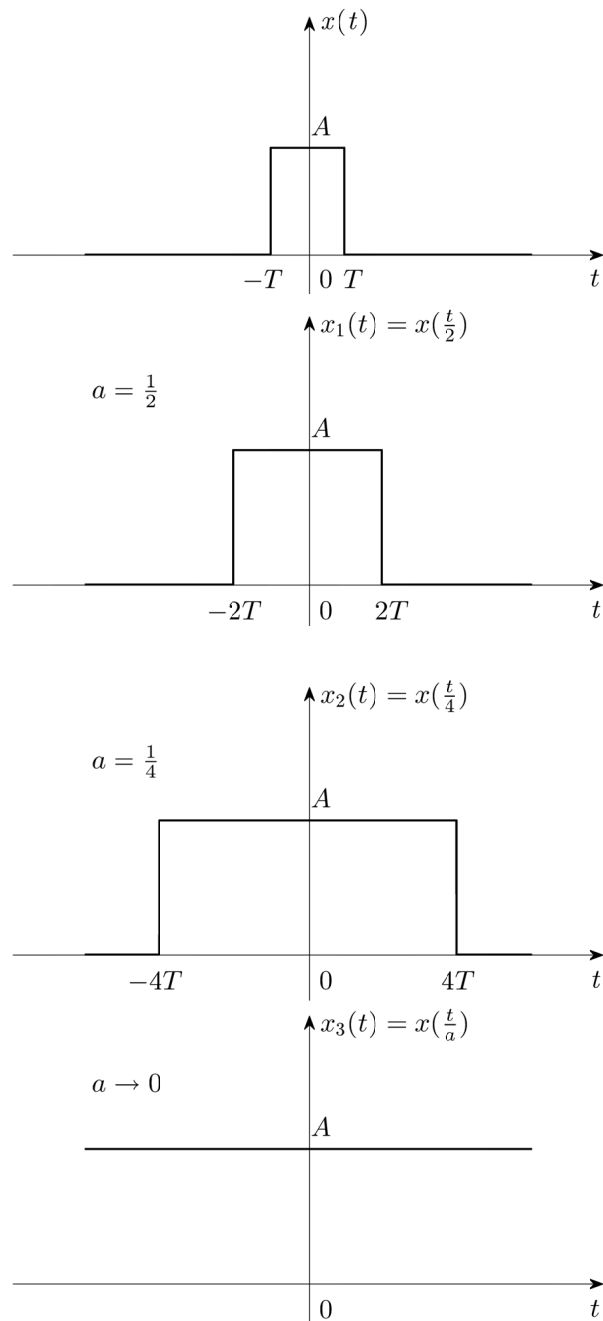
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(t)e^{-j\frac{\Omega}{a}t} dt = -\frac{1}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} x(t)e^{-j\frac{\Omega}{a}t} dt = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\frac{\Omega}{a}t} dt = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right), \end{aligned} \quad (6.70)$$

dok je za $a > 0$:

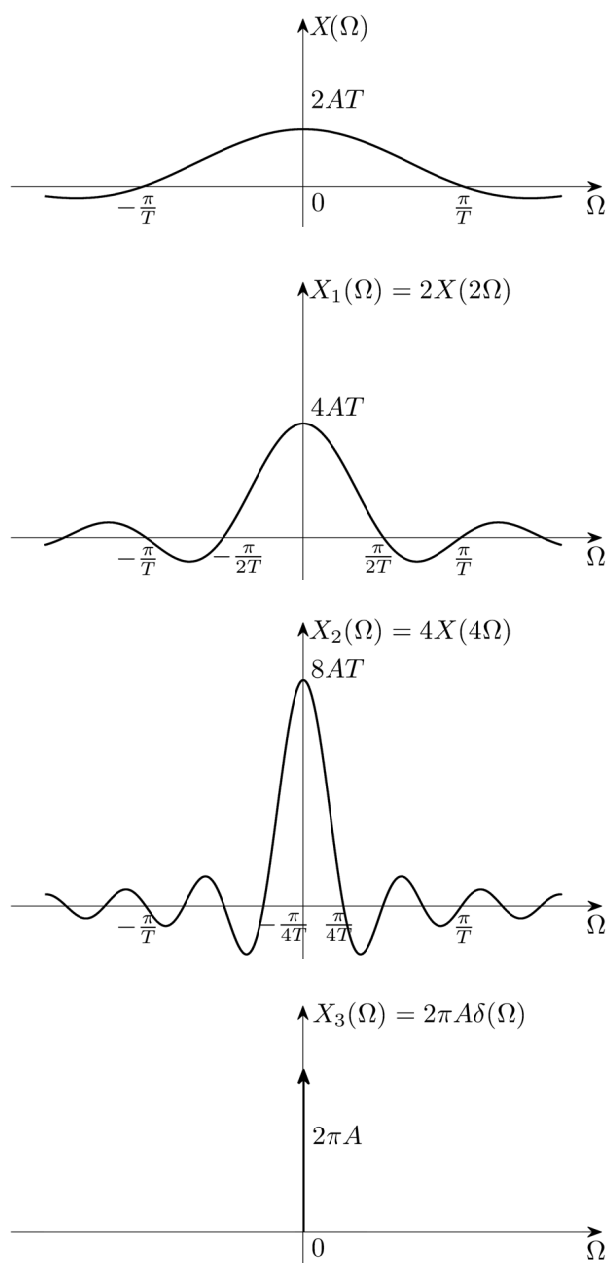
$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\frac{\Omega}{a}t} dt = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right). \quad (6.71)$$

□

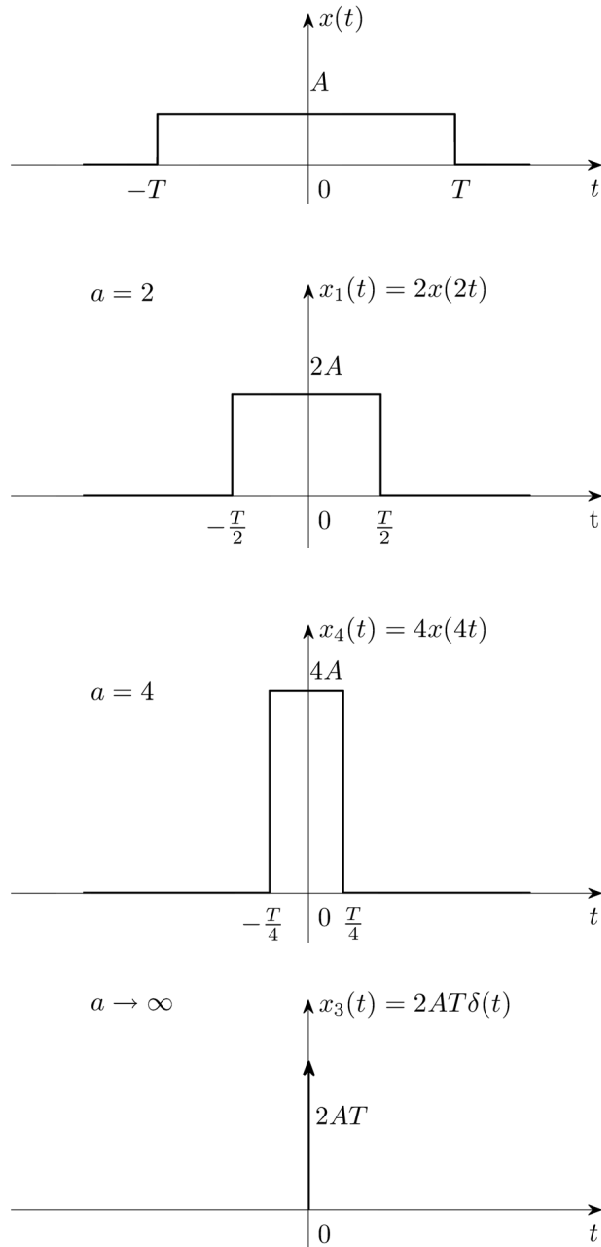
Ilustracija osobine skaliranja data je na Slici 6.12.



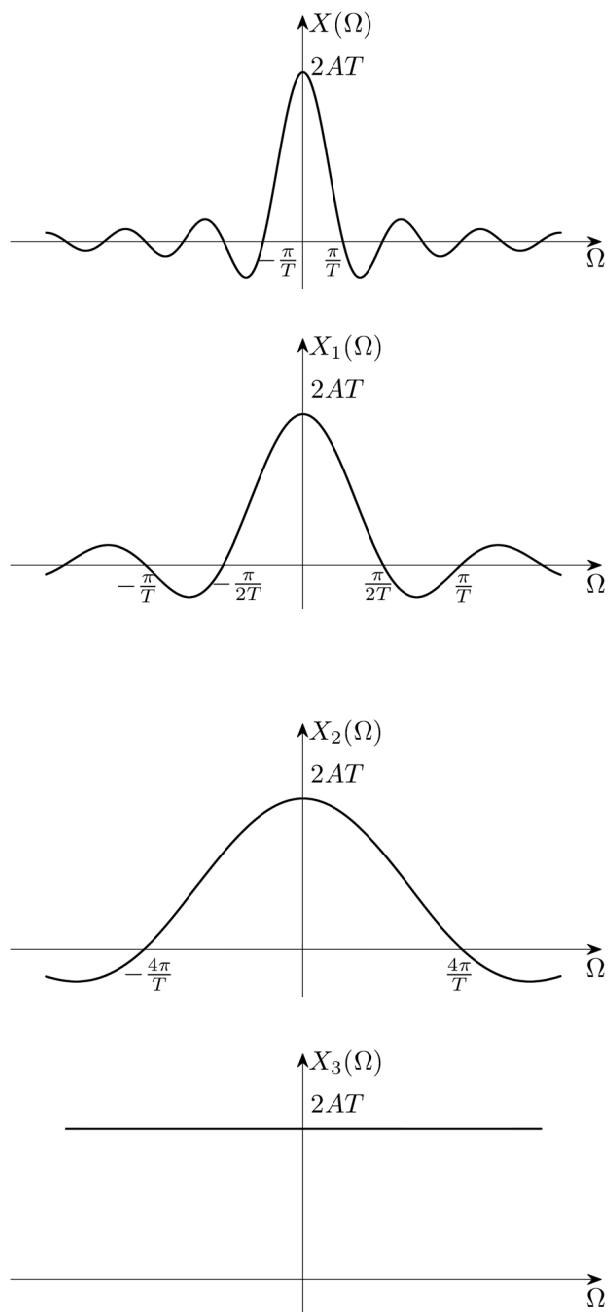
Slika 6.12 (a) Skaliranje sa faktorom manjim od jedan, vremenski domen (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 6.12 (nastavak): (b) skaliranje sa faktorom manjim od jedan, frekvencijski domen (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 6.12 (nastavak): (c) skaliranje sa faktorom većim od jedan, vremenski domen (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 6.12 (nastavak): (d) skaliranje sa faktorom većim od jedan, frekvencijski domen.

6.4.6 Konvolucija u vremenskom domenu

Podsjetimo se da je u obradi signala konvolucija:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \quad (6.72)$$

jedna od osnovnih operacija jer omogućava pronalaženje odziva na proizvoljnu pobudu sistema sa poznatim impulsnim odzivom.

Konvoluciji signala u vremenskom domenu odgovara množenje u frekvencijskom domenu. Ako je $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega)$ i $x_2(t) \leftrightarrow X_2(\Omega)$, tada vrijedi da je:

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega). \quad (6.73)$$

Dokaz:

Potražimo Furijeovu transformaciju konvolucije dva signala:

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) * x_2(t)] e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\Omega t} dt. \quad (6.74)$$

Nakon zamjene redoslijeda integraljenja:

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-j\Omega t} dt \right] d\tau \quad (6.75)$$

i smjene varijabli $\theta = t - \tau$:

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\theta) e^{-j\Omega \theta} d\theta \right] e^{-j\Omega \tau} d\tau, \quad (6.76)$$

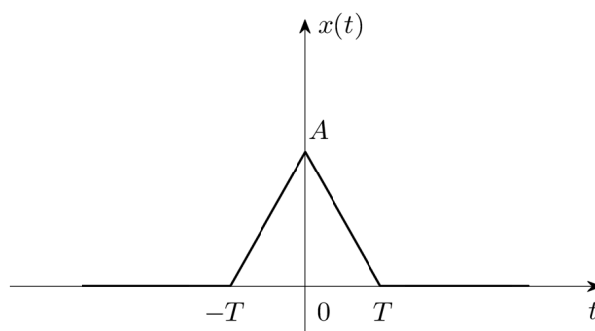
uz napomenu da integral u uglastim zagradama ne zavisi od τ , dobijamo:

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\theta) e^{-j\Omega \theta} d\theta \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau \right] = X_2(\Omega) \cdot X_1(\Omega). \quad (6.77)$$

□

Primjer 6.7:

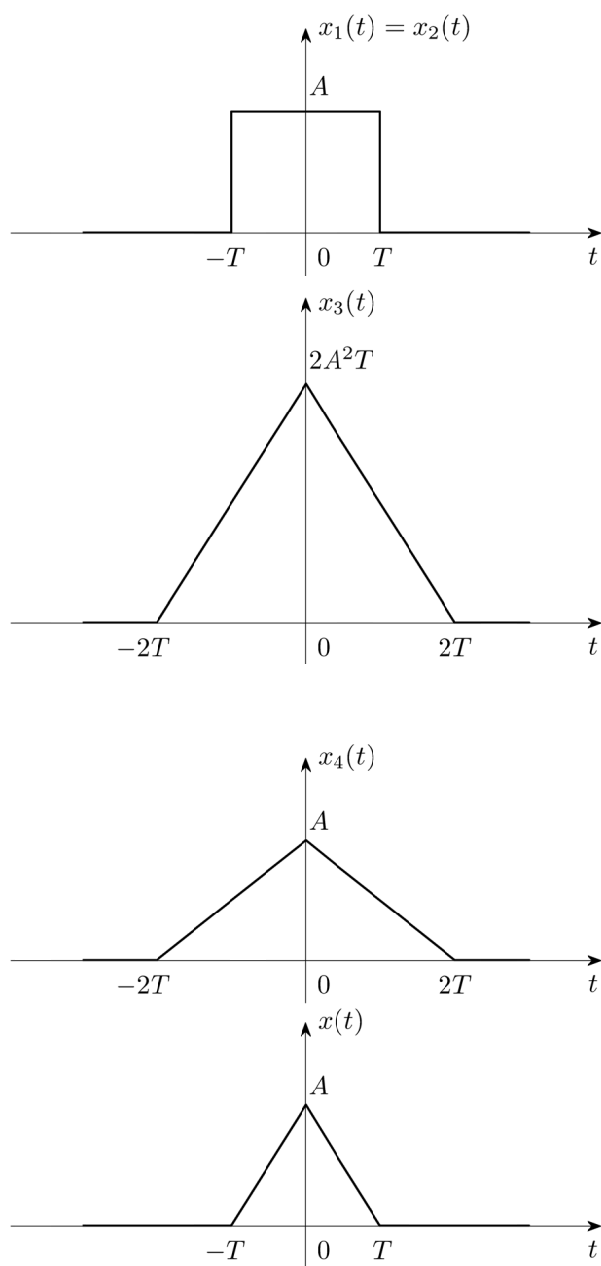
Polazeći od poznatog izraza za Furijeovu transformaciju pravougaonog impulsa i koristeći osobinu konvolucije, odrediti Furijeovu transformaciju trougaonog impulsa sa Slike 6.13, amplitude A i trajanja od $-T$ do T .



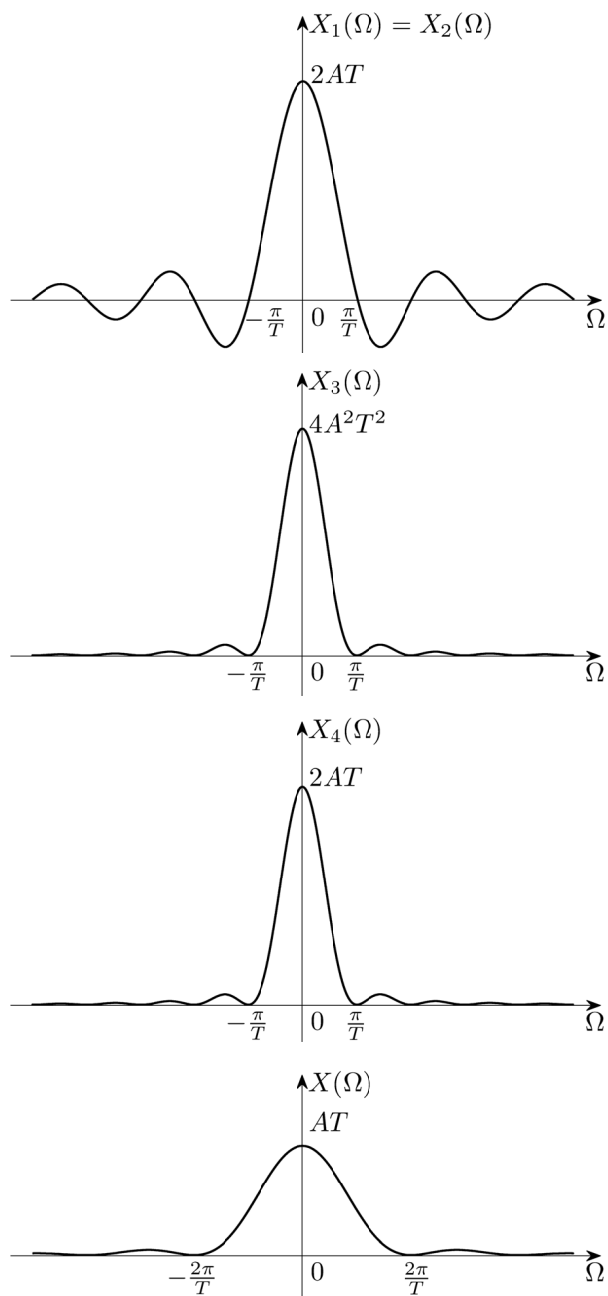
Slika 6.13 Trougaoni impuls.

Rješenje:

Postupak određivanja Furijeove transformacije trougaonog impulsa je prikazan je na Slici 6.14. Prvo se odredi Furijeova transformaciju pravougaonog impulsa amplitude A i trajanja od $-T$ do T koja je jednaka $2AT \operatorname{sinc} \Omega T$. Konvolucija ovakva dva pravougaona impulsa $x_1(t)$ i $x_2(t)$ rezultuje trougaonim impulsom $x_3(t)$ amplitude $2A^2T$ i trajanja od $-2T$ do $2T$, čija je Furijeova transformacija, dobijena koristeći osobinu konvolucije u vremenskom domenu, jednaka $4A^2T^2 \operatorname{sinc}^2 \Omega T$. Kako bismo od trougaonog impulsa koji je nastao konvolucijom dobili trougaoni impuls čiju Furijeovu transformaciju tražimo, neophodno ga je umanjiti po amplitudi $2AT$ puta da se dobije signal $x_4(t)$, a zatim skalirati sa faktorom 2, te se primjenom osobina linearnosti i skaliranja konačno dobije tražena Furijeova transformacija u obliku $AT \operatorname{sinc}^2 \frac{\Omega T}{2}$.



Slika 6.14 Određivanje Furijeove transformacije trougaonog impulsa (vremenski domen).



Slika 6.14 Određivanje Furijeove transformacije trougaonog impulsa (frekvencijski domen).

6.4.7 Konvolucija u frekvencijskom domenu

Osobina konvolucije u vremenskom domenu, koja se ponekad naziva i *modulacioni teorem*, kaže da konvoluciji Furijeovih transformacija signala u frekvencijskom domenu odgovara množenje signala u vremenskom domenu. Ako je $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega)$ i $x_2(t) \leftrightarrow X_2(\Omega)$, tada je:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega). \quad (6.78)$$

Dokaz:

Potražimo inverznu Furijeovu transformaciju konvolucije Furijeovih transformacija dva signala, koja je podijeljena sa 2π :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega) \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega) \right] e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Psi) X_2(\Omega - \Psi) d\Psi \right] e^{j\Omega t} d\Omega. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Nakon zamjene redoslijeda integraljenja:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega) \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Psi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Omega - \Psi) e^{-j\Omega t} d\Omega \right] d\Psi, \quad (6.80)$$

i smjene varijabli $\Theta = \Omega - \Psi$:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega) \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Psi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Theta) e^{j\Theta t} d\Theta \right] e^{j\Psi t} d\Psi, \quad (6.81)$$

uz napomenu da integral u uglastim zagradama ne zavisi od Ψ , dobijamo sljedeće:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)\right\}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_2(\Theta)e^{j\Theta t}d\Theta\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(\Psi)e^{j\Psi t}d\Psi\right], \quad (6.82)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)\right\}=x_1(t)\cdot x_2(t). \quad (6.83)$$

□

Primjer 6.8:

Odrediti Furijeovu transformaciju kosinusoide učestanosti $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, amplitudno modulirane sa trougaonim impulsom jedinične amplitude i trajanja od $-T$ do T . Vrijedi da je $T_0 = \frac{T}{4}$.

Rješenje:

Označimo sa $x_1(t)$ trougaoni impuls prikazan na Slici 6.15(a). Amplitudnom modulacijom kosinusoide sa trougaonim impulsom dobijamo:

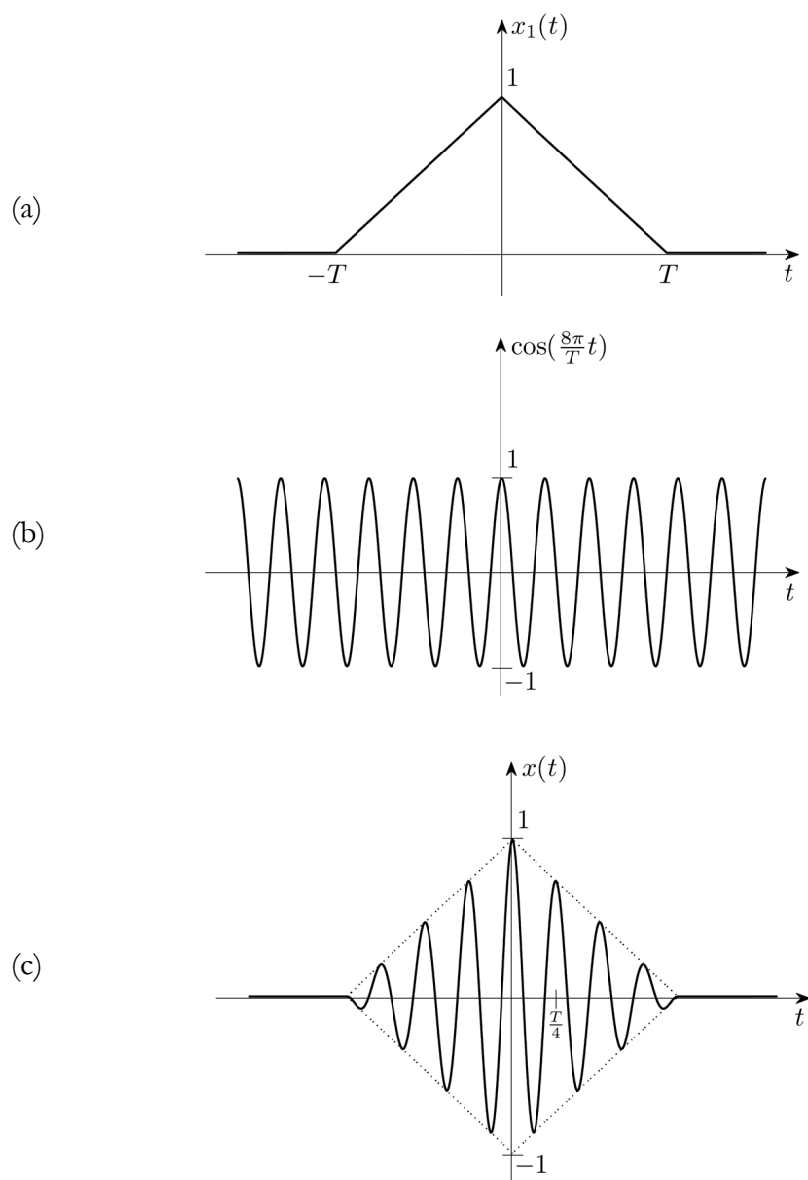
$$x(t) = x_1(t) \cdot \cos \Omega_0 t. \quad (6.84)$$

Na osnovu pravila konvolucije u frekvencijskom domenu dobijamo:

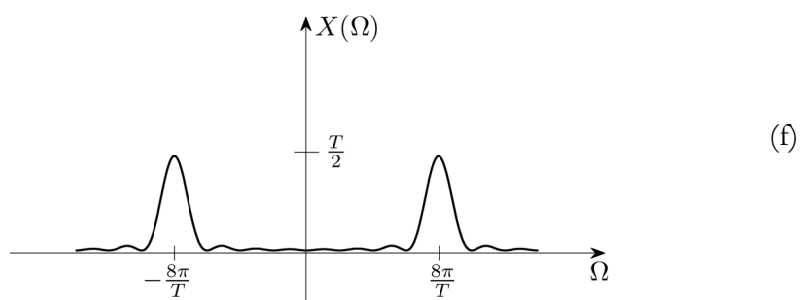
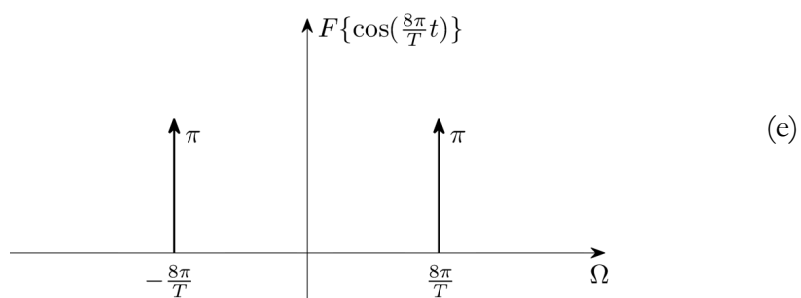
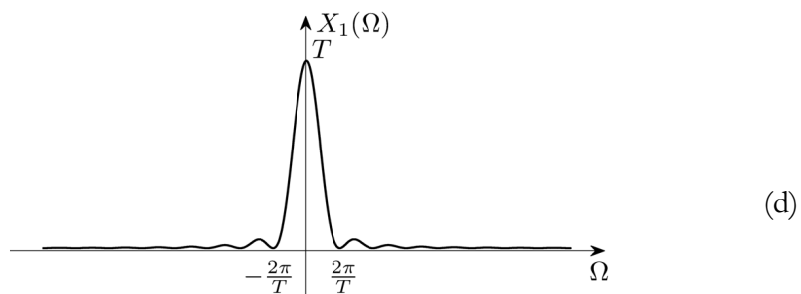
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * \mathcal{F}\{\cos \Omega_0 t\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * [\pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)] = \\ &= \frac{1}{2} X_1(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2} X_1(\Omega + \Omega_0), \end{aligned} \quad (6.85)$$

gdje je $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, a $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega) = T \operatorname{sinc}^2 \frac{\Omega T}{2}$. Postupak je ilustrovan na Slici 6.15, a konačan analitički izraz dat sa:

$$X(\Omega) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2 \frac{(\Omega - \Omega_0)T}{2} + \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2 \frac{(\Omega + \Omega_0)T}{2}. \quad (6.86)$$



Slika 6.15 (a) Trougaoni impuls; (b) kosinusoida i (c) amplitudno modulirana kosinusoida.



Slika 6.15 (d) Furijeova transformacija trougaonog impulsa;
 (e) Furijeova transformacija kosinusoide i (f) Furijeova transformacija amplitudno modulisane kosinusoide.

□

6.4.8 Deriviranje u vremenskom domenu

Ako postoji transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, tada je:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\Omega X(\Omega). \quad (6.87)$$

Ako u vremenskom domenu deriviramo signal, to će u frekvencijskom domenu, zbog množenja sa $j\Omega$, dovesti do naglašavanja visokofrekvencijskih komponenti signala.

Dokaz:

Izrazimo signal $x(t)$ preko inverzne Furijeove transformacije, pa potražimo njegov izvod:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\Omega X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (6.88)$$

Dobijeni izraz je inverzna Furijeova transformacija od $j\Omega X(\Omega)$, te je:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\Omega X(\Omega). \quad (6.89)$$

Ponavljajući postupak n puta, dobijamo da je:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\Omega)^n X(\Omega). \quad (6.90)$$

□

Primjer 6.9:

Odrediti Furijeovu transformaciju jedinične odskočne funkcije.

Rješenje:

Između funkcije znaka:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (6.91)$$

i Hevisajdove funkcije:

$$u_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (6.92)$$

postoji sljedeća veza:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) = u_h(t) - \frac{1}{2}. \quad (6.93)$$

Prvi izvod funkcije $\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$ jednak je prvom izvodu funkcije $u_h(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \right] = \frac{d}{dt} \left[u_h(t) - \frac{1}{2} \right] = \frac{du_h(t)}{dt} = \delta(t). \quad (6.94)$$

Znajući da Dirakova funkcija kao transformacioni par ima konstantu vrijednosti jedan, dobijamo Furijeovu transformaciju izvoda funkcije znaka i Furijeovu transformaciju izvoda funkcije $u_h(t)$:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \right] \right\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{du_h}{dt} \right\} = 1. \quad (6.95)$$

Koristeći osobinu deriviranja u vremenskom domenu dobijamo:

$$j\Omega \mathcal{F} \left\{ \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \right] \right\} = j\Omega \mathcal{F} \{ u_h(t) \} = 1. \quad (6.96)$$

Da bismo dobili Furijeove transformacije funkcije znaka i funkcije $u_h(t)$, trebamo prethodnu jednakost podijeliti sa $j\Omega$. Kako Ω poprima vrijednosti od $-\infty$ do ∞ , spektar signala koji se dobije dijeljenjem sa $j\Omega$ važeći je za sve učestanosti osim za $\Omega = 0$.

Vrijednost spektra za $\Omega=0$ nosi informaciju o jednosmjernoj komponenti sadržanoj u signalu. Za funkciju znaka vrijednost Furijeove transformacije za $\Omega=0$ je jednaka nuli:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\}\Big|_{\Omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j0t} dt = -\int_{-\infty}^0 1 \cdot dt + \int_0^{\infty} 1 \cdot dt = 0, \quad (6.97)$$

što znači da u funkciji znaka nije sadržana jednosmjerna komponenta, dok funkcija $u_h(t)$ ima jednosmjernu komponentu jer njena Furijeova transformacija u nuli ima beskonačnu vrijednost:

$$\mathcal{F}\{u_h(t)\}\Big|_{\Omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} u_h(t) e^{-j0t} dt = \int_{0_-}^{0_+} \frac{1}{2} \cdot dt + \int_{0_+}^{\infty} 1 \cdot dt = \int_{0_+}^{\infty} 1 \cdot dt \rightarrow \infty. \quad (6.98)$$

Koristeći vezu:

$$u_h(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2}, \quad (6.99)$$

dobijamo Furijeovu transformaciju funkcije $u_h(t)$:

$$\mathcal{F}\{u_h(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega). \quad (6.100)$$

Vrijednost jediničnog odskočnog signala:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \quad (6.101)$$

u nuli nije definisana. Ovaj signal može da se od funkcije $u_h(t)$ razlikuje samo u $t=0$. Ta razlika ne utiče na vrijednost Furijeovog integrala, te je Furijeova transformacija jediničnog odskočnog signala $u(t)$ jednaka Furijeovoj transformaciji Hevisajdove funkcije $u_h(t)$:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega). \quad (6.102)$$

Napomenimo da se prilikom određivanja inverzne Furijeove transformacije iz $\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$ na osnovu (6.20) uvijek rekonstruiše Hevisajdova funkcija $u_h(t)$.

□

6.4.9 Deriviranje u frekvencijskom domenu

Deriviranju u frekvencijskom domenu odgovara množenje sa nezavisnom varijablom t u vremenskom domenu. Ako postoji transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, tada je:

$$tx(t) \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}. \quad (6.103)$$

Dokaz:

Deriviranjem izraza za Furijeovu transformaciju po Ω :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = X(\Omega) \left| \frac{d}{d\Omega} \right. \quad (6.104)$$

dobijamo:

$$-j \int_{-\infty}^{\infty} tx(t) e^{-j\Omega t} dt = \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}, \quad (6.105)$$

te je:

$$tx(t) \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}. \quad (6.106)$$

Deriviranjem n puta dobijamo transformacioni par:

$$t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n X(\Omega)}{d\Omega^n}. \quad (6.107)$$

□

6.4.10 Integraljenje u vremenskom domenu

Integraljenju u vremenskom domenu odgovara dijeljenje u frekvencijskom domenu sa nezavisnom varijablom Ω , zbog čega dolazi do naglašavanja niskofrekvencijskih komponenti signala. Ukoliko originalni signal ima jednosmjernu komponentu, u spektru integraljenog signala pojavljuje se Dirakov impuls jačine udara $\pi X(0)$.

Ako postoji transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, tada vrijedi da je:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega). \quad (6.108)$$

Dokaz:

Znamo da je Furijeova transformacija Hevisajdove funkcije $\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$.

Konvolucija proizvoljnog signala $x(t)$ i Hevisajdove funkcije $u(t)$ je data sa:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau. \quad (6.109)$$

Furijeova transformacija prethodnog izraza, uz korišćenje osobine konvolucije u vremenskom domenu, daje:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} &= \mathcal{F} \{ x(t) * u(t) \} = X(\Omega) \cdot \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \right] = \\ &= \frac{X(\Omega)}{j\Omega} + \pi X(0) \delta(\Omega). \end{aligned} \quad (6.110)$$

□

6.4.11 Integraljenje u frekvencijskom domenu

Ako postoji transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, onda vrijedi da je:

$$\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{\Omega}^{\infty} X(\Psi) d\Psi. \quad (6.111)$$

Dokaz:

Na osnovu pravila simetrije i poznatog transformacionog para:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \quad (6.112)$$

dobijamo:

$$\frac{1}{jt} + \pi\delta(t) \leftrightarrow 2\pi u(-\Omega). \quad (6.113)$$

Inverzna Furijeova transformacija konvolucije proizvoljnog signala $X(\Omega)$ i reflektovane Hevisajdove funkcije $u(-\Omega)$ u frekvencijskom domenu, jednaka je umnošku njihovih pojedinačnih inverznih Furijevih transformacija i faktora 2π :

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega) * u(-\Omega)\} = 2\pi x(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jt} + \pi\delta(t) \right] \right\} = \frac{x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t). \quad (6.114)$$

S druge strane, konvolucioni integral proizvoljnog signala $X(\Omega)$ i reflektovane Hevisajdove funkcije $u(-\Omega)$ u frekvencijskom domenu, zbog antikauzalnosti reflektovane Hevisajdove funkcije, različit je od nule samo u granicama od Ω do ∞ :

$$X(\Omega) * u(-\Omega) = \int_{\Omega}^{\infty} X(\Psi) d\Psi. \quad (6.115)$$

Na osnovu dvije posljednje relacije zaključujemo da je:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \int_{\Omega} X(\Psi) d\Psi \right\} = \frac{x(t)}{jt} + \pi x(0) \delta(t). \quad (6.116)$$

□

U Tabeli 6.1 je dat zbirni prikaz osobina Furijeove transformacije.

6.5 Furijeova transformacija periodičnih signala

Do sada smo za predstavu periodičnih signala preko elementarnih kompleksnih eksponencijalnih (prostoperiodičnih) komponenti koristili razvoj signala u Furijeov red. Osnovna karakteristika spektra periodičnih signala koja ga razlikuje od spektra neperiodičnih signala je njegova diskretnost, odnosno konačne razlike frekvencija spektralnih komponenti. Analizirajući osobine Furijeove transformacije primijetili smo da se u spektru konstante, sinusne i kosinusne funkcije pojavljuju Dirakovi impulsi. Sada ćemo razmatranje uopštiti i pokazati da se Furijeova transformacija može koristiti i za spektralnu analizu periodičnih signala. U tu svrhu prvo ćemo prikazati periodičan signal preko Furijeovog reda, a zatim pronaći Furijeovu transformaciju tog signala. Kompleksni oblik Furijeovog reda je oblika:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (6.117)$$

sa koeficijentima:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt. \quad (6.118)$$

Tabela 6.1. Osobine Furijeove transformacije.

Osobina	$x(t)$	$X(\Omega)$
Simetrija	$X(t)$	$2\pi x(-\Omega)$
Linearnost	$ax_1(t) + bx_2(t), \forall a, b \in \mathbb{C}$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Pomak u vremenskom domenu	$x(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$
Pomak u frekvencijskom domenu	$x(t) \cdot e^{j\Omega_0 t}$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Skaliranje	$x(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$
Konvolucija u vremenskom domenu	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega)$
Konvolucija u frekvencijskom domenu	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$
Deriviranje u vremenskom domenu	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\Omega X(\Omega)$
Deriviranje u frekvencijskom domenu	$tx(t)$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Integraljenje u vremenskom domenu	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega)$
Integraljenje u frekvencijskom domenu	$\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0) \delta(t)$	$\int_{\Omega}^{\infty} X(\Psi) d\Psi$

Furijeovom transformacijom signala $\tilde{x}(t)$ dobijamo:

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{C_k e^{jk\Omega_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0). \quad (6.119)$$

Furijeova transformacija periodičnog signala je niz Dirakovih impulsa na učestanostima $k\Omega_0$ za koje se inače računa Furijeov red tog signala. Za ostale učestanosti taj spektar je jednak nuli, te kažemo da ima diskretnu prirodu. Svaki Dirakov impuls $2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$ u posljednjem izrazu zapravo je Furijeova transformacija jedne kompleksne prostoperiodične komponente $e^{jk\Omega_0 t}$, dobijen na osnovu osobine pomaka u frekvencijskom domenu.

Dakle, pri traženju Furijeove transformacije periodičnog signala, neophodno je pronaći koeficijente Furijeovog reda tog signala. Tada je:

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0). \quad (6.120)$$

Određivanje koeficijenata Furijeovog reda pri traženju Furijeove transformacije periodičnih signala se može izbjeći. Naime, svaki periodičan signal $\tilde{x}(t)$ perioda T_0 možemo posmatrati kao rezultat konvolucije neperiodičnog signala $x(t)$ koji je na osnovnom periodu jednak periodičnom signalu:

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right), \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (6.121)$$

sa povorkom Dirakovih impulsa:

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0). \quad (6.122)$$

Dakle,

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \tilde{\delta}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0). \quad (6.123)$$

Koristeći osobinu konvolucije u vremenskom domenu, Furijeova transformacija periodičnog signala jednaka je proizvodu Furijeove transformacije signala $x(t)$ i Furijeove transformacije povorke Dirakovih impulsa $\tilde{\delta}(t)$:

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * \tilde{\delta}(t)\} = X(\Omega) \cdot \mathcal{F}\{\tilde{\delta}(t)\}. \quad (6.124)$$

Prvo ćemo odrediti koeficijente Furijeovog reda i pronaći Furijeovu transformaciju povorke Dirakovih impulsa:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{\delta}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}, \quad (6.125)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{\delta}(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= \Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) = \tilde{\delta}(\Omega). \end{aligned} \quad (6.126)$$

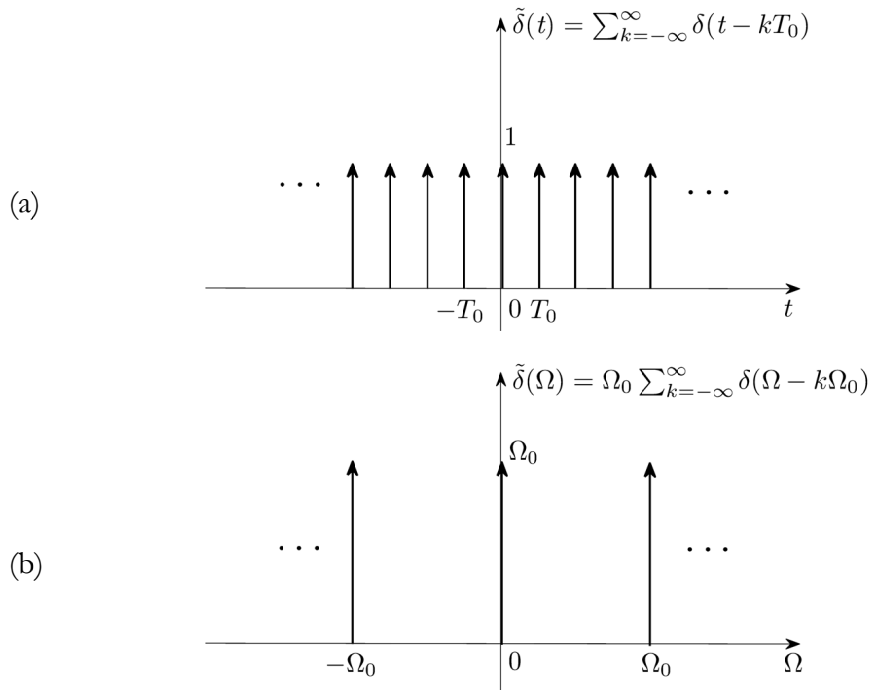
Furijeova transformacija povorke Dirakovih impulsa prikazana je na Slici 6.16.

Primjenjujući osobinu odabiranja Dirakove funkcije u frekvencijskom domenu:

$$X(\Omega) \delta(\Omega - k\Omega_0) = X(k\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (6.127)$$

iz (6.133) i (6.135) dobijamo Furijeovu transformaciju periodičnog signala:

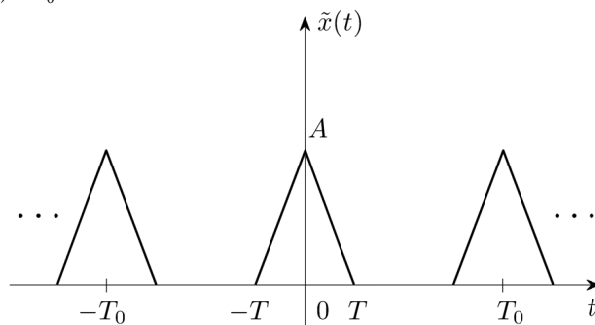
$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = X(\Omega) \cdot \Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) = \Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0). \quad (6.128)$$



Slika 6.16 (a) Signal u obliku povorke Dirakovih impulsa i (b) njegova Furijeova transformacija.

Primjer 6.10:

Odrediti Furijeovu transformaciju povorke trougaonih impulsa datih na Slici 6.17, pri čemu je $T_0 = 4T$.

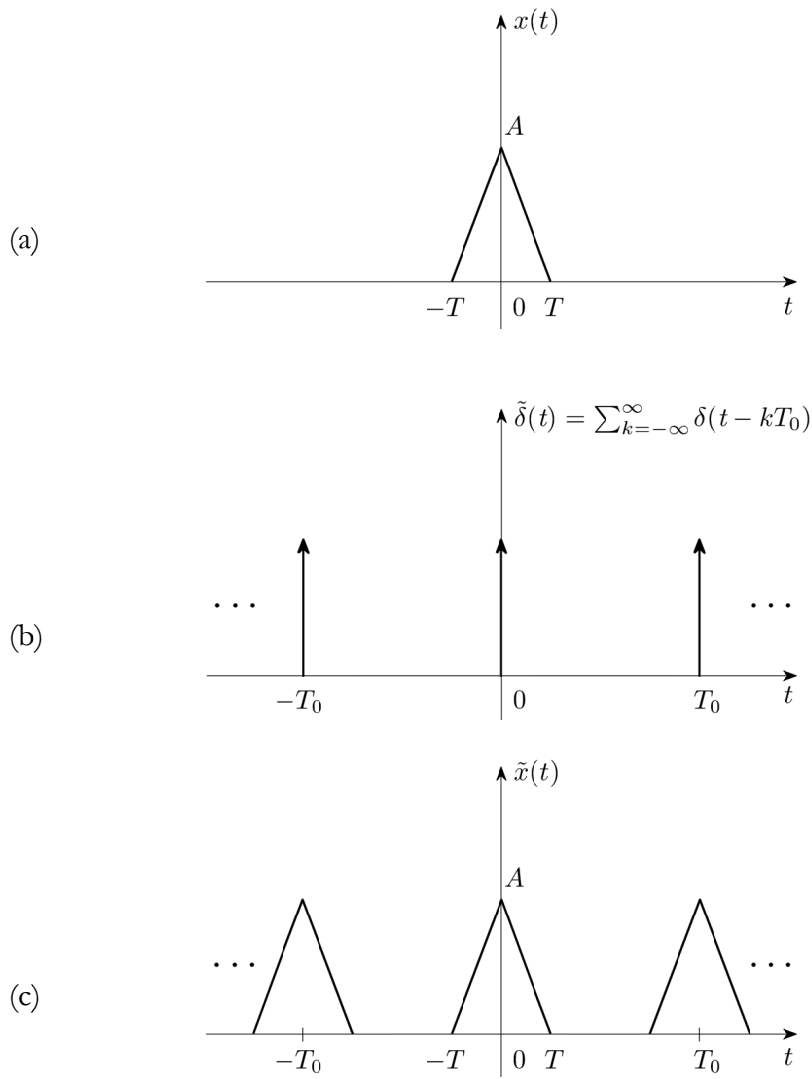


Slika 6.17 Povorka trougaonih impulsa.

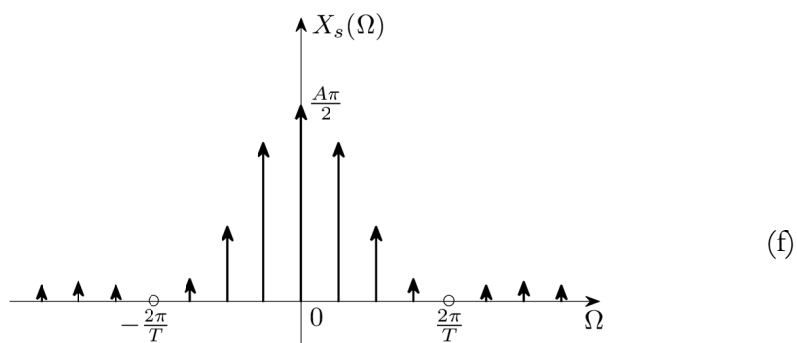
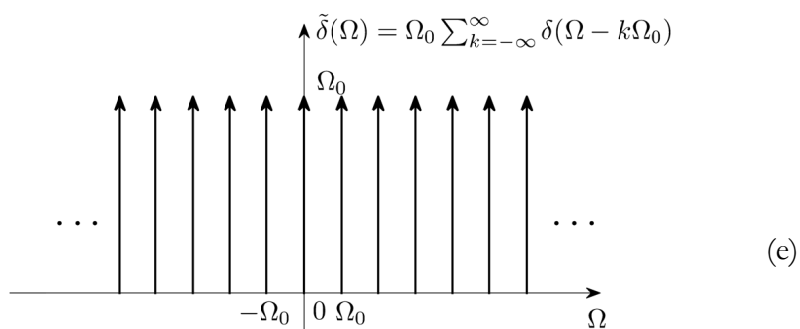
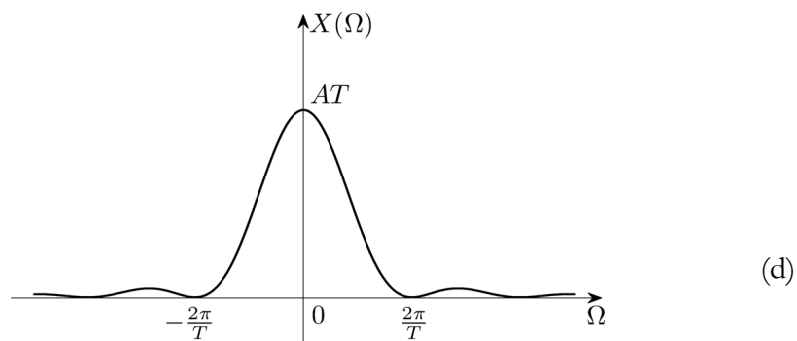
Rješenje:

Postupak određivanja Furijeove transformacije povorke trougaonih impulsa prikazan je na Slici 6.18. Prvo izdvajamo jedan period periodičnog signala $\tilde{x}(t)$ i formiramo signal $x(t)$. Furijeova transformacija neperiodičnog signala $x(t)$ je $X(\Omega) = AT \operatorname{sinc}^2 \frac{\Omega T}{2}$. Periodičan signal $\tilde{x}(t)$ u vremenskom domenu možemo dobiti konvolucijom signala $x(t)$ i povorke Dirakovih impulsa $\tilde{\delta}(t)$, čemu u domenu Furijeove transformacije odgovara množenje, tako da je:

$$\begin{aligned} X_s(\Omega) &= \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * \tilde{\delta}(t)\} = \\ &= AT \operatorname{sinc}^2 \frac{\Omega T}{2} \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= \frac{\pi A}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 \frac{k\pi}{4} \delta(\Omega - k\Omega_0). \end{aligned} \tag{6.129}$$



Slika 6.18 Određivanje Furijeove transformacije povorka trougaonih impulsa (vremenski domen): (a) jedan trougaoni impuls; (b) povorka Dirakovih impulsa i (c) povorka trougaonih impulsa.



Slika 6.18 Određivanje Furijeove transformacije povorke trougaonih impulsa (frekvencijski domen): (d) Furijeova transformacija jednog trougaonog impulsa; (e) Furijeova transformacija povorke Dirakovih impulsa i (f) Furijeova transformacija povorke trougaonih impulsa.

□

6.6 Parsevalova teorema za kontinualne neperiodične signale

Posmatrajmo neperiodične signale koji imaju konačnu energiju datu sa:

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (6.130)$$

Koristeći izraz za sintezu signala:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (6.131)$$

i njegov konjugovano kompleksni oblik:

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega, \quad (6.132)$$

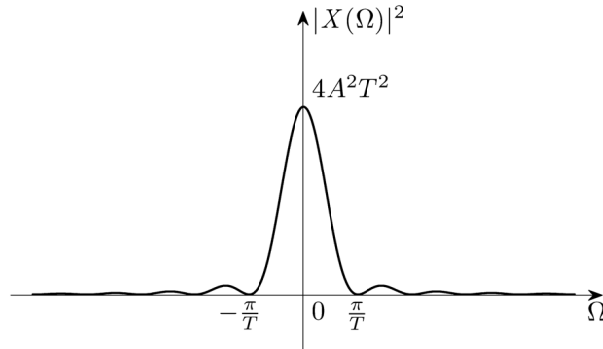
pokazaćemo da energiju signala možemo računati i u transformacionom domenu:

$$\begin{aligned} W_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\Omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \right] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\Omega) X(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Parsevalova teorema za neperiodične kontinualne signale:

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (6.134)$$

nam kaže da energiju signala možemo računati i u frekvencijskom domenu. Funkcija $|X(\Omega)|^2$ se u literaturi naziva *spektralna gustina energije*, *gustina energetskeg spektra* ili kratko *energetski spektar* signala. Primjer grafičke predstave energetskeg spektra dat je na Slici 6.19.



Slika 6.19 Energetski spektar pravougaonog impulsa.

Za realne signale vrijedi $|X(-\Omega)|^2 = |X(\Omega)|^2$, što znači da je energetski spektar parna funkcija.

Energetski spektar signala je preko Furijeove transformacije povezan sa korelacijom signala. Potražimo Furijeovu transformaciju autokorelacije:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) \otimes x(t)\} &= \mathcal{F}\{x^*(-t) * x(t)\} = \mathcal{F}\{x^*(-t)\} \cdot \mathcal{F}\{x(t)\} = \\ &= X^*(\Omega) X(\Omega). \end{aligned} \quad (6.135)$$

Pri tome smo koristili da je:

$$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(\Omega), \quad (6.136)$$

što je lako pokazati:

$$\begin{aligned} X^*(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\Omega t} dt \Big|_{t \rightarrow -\tau} = - \int_{\infty}^{-\infty} x^*(-\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-t) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \mathcal{F}\{x^*(-t)\}. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Zaključujemo da je Furijeova transformacija autokorelacije jednaka gustini energetskog spektra signala:

$$\mathcal{F}\{R_{xx}(t)\} = |X(\Omega)|^2. \quad (6.138)$$

Dakle, autokorelacija i energetski spektar signala nose istu informaciju o signalu i iz njih nije moguće rekonstruisati originalni signal.

6.7 Odmjeravanje signala

Ako se radi digitalna obrada kontinualnih signala, signalu je potrebno pridružiti niz brojeva koji odgovaraju njegovim vrijednostima u odabranim trenucima vremena. Taj postupak, koji nazivamo *analogno/digitalna konverzija* ili kratko *digitalizacija*, se sastoji od dva koraka. Prvo se vrši *odmjeravanje* signala tako što se uzimaju uzorci signala u odabranim vremenskim trenucima. Zatim se vrijednosti tako dobijenih odmjeraka signala *kvantuju* i dodjeljuje im se brojna vrijednost iz konačnog skupa brojeva. U ovom poglavlju ćemo se baviti uticajem odmjeravanja na spektralne karakteristike signala.

Odmjeravanje signala ćemo matematički modelirati množenjem signala sa povorkom Dirakovih impulsa:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \tilde{\delta}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t). \quad (6.139)$$

Signal koji nastaje procesom odmjeravanja, nazvaćemo *odmjereni signal*. Potrebno je naglasiti da je odmjereni signal kontinualna funkcija, jer su njegove vrijednosti poznate u svakom trenutku vremena. Odmjereni signal je zapravo povorka Dirakovih impulsa u trenucima odabiranja $t = k\Delta t$, čije su jačine udara jednake vrijednostima signala u tim vremenskim trenucima. Za ostale vrijednosti vremenske nezavisne varijable odmjereni signal jednak je nuli.

Furijeova transformacija odmjerenog signala je:

$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot \tilde{\delta}(t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\{\tilde{\delta}(t)\}, \quad (6.140)$$

$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad (6.141)$$

$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \tilde{X}_s(\Omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s), \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}. \quad (6.142)$$

Primjećujemo da se spektar odmjerenog signala periodično ponavlja sa periodom koji je jednak učestanosti odmjeravanja:

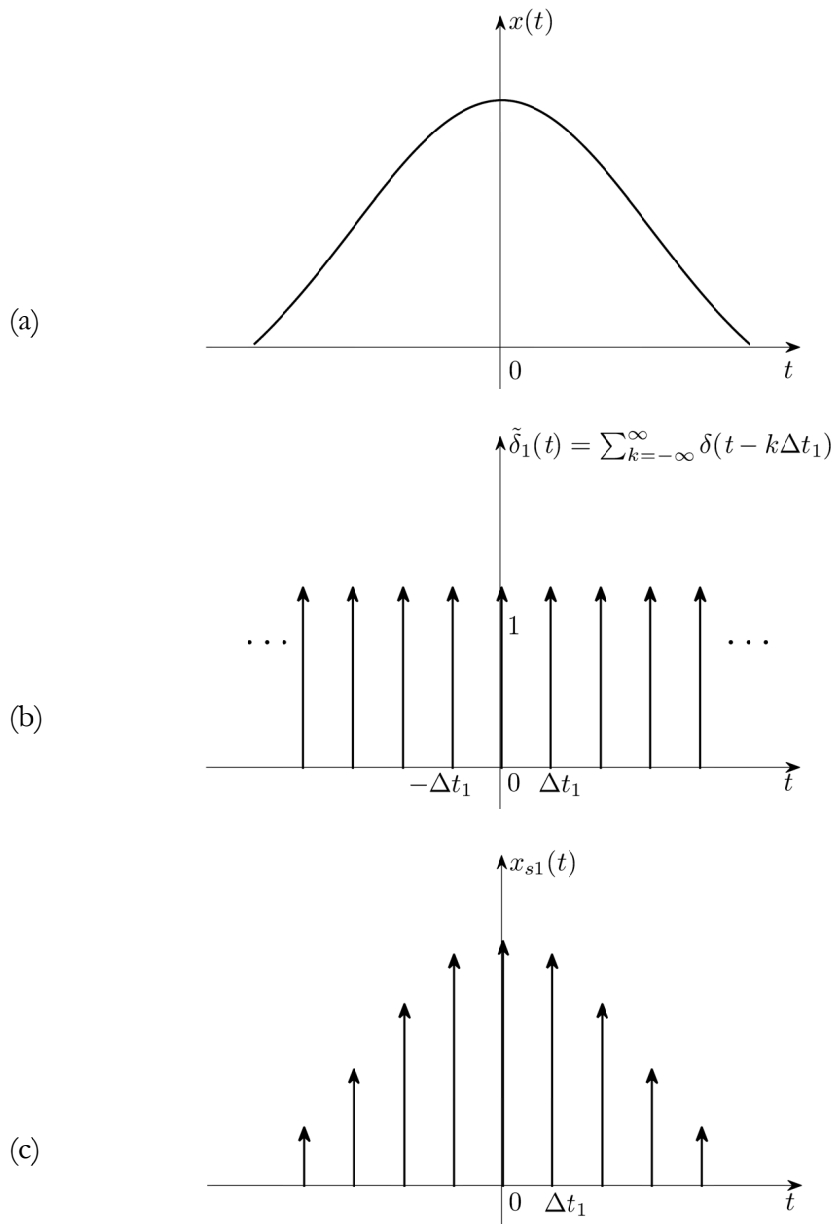
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}. \quad (6.143)$$

Osnovni cilj prilikom odmjera vanja signala je da se saču va što više informacija sadržanih u signalu, kako bi se na osnovu odmjera ka mogao što bolje rekonstruisati originalni kontinualni signal. Na osnovu teorije razvoja signala preko ortogonalnih funkcija znamo da je za idealnu rekonstrukciju signala računanjem inverzne transformacije neophodno poznavanje svih spektralnih komponenti signala, dok je za aproksimaciju signala moguće koristiti uži frekvencijski opseg, pri čemu se dodavanjem visokofrekvencijskih komponenti smanjuje srednjekvadratna greška pri rekonstrukciji signala.

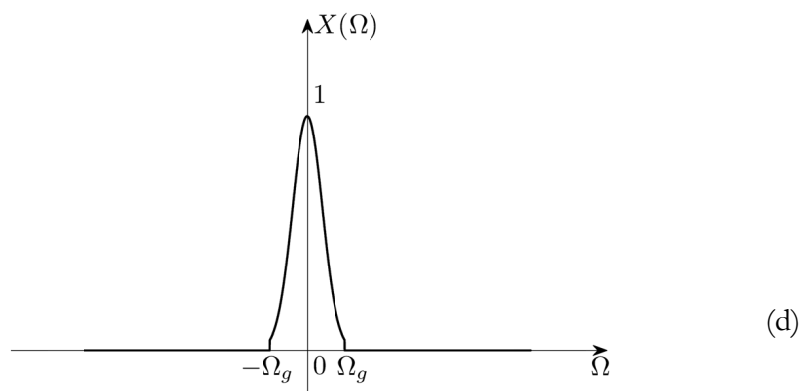
Kao posljedica odmjera vanja signala, u frekvencijskom domenu dolazi do periodičnog ponavljanja spektra kontinualnog signala. Pri tome se može desiti da se frekvencijske komponente iz jednog perioda signala preklape sa frekvencijskim komponentama iz drugih perioda. Tu pojavu nazivamo *preklapanje spektra (aliasing)*. Preklapanje spektra se može izbjeći ako je spektar kontinualnog signala ograničen. U praktičnim primjenama često radimo sa signalima za koje možemo smatrati da imaju ograničen spektar. Vidjećemo da je pod tim uslovom moguće iz spektra odmjera nog signala izdvojiti spektar kontinualnog signala, te inverznom Furijeovom transformacijom rekonstruisati originalni kontinualni signal.

Pretpostavimo da je spektar signala ograničen, tj. da se u spektru signala ne pojavljuju frekvencijske komponente učestanosti većih od Ω_g . Na Slici 6.20 su prikazana tri karakteristična slučaja koja ilustruju šta se dešava sa spektrom odmjera nog realnog signala (čiji je spektar paran) prilikom promjene učestanosti odmjera vanja. U prvom slučaju učestanost odmjera vanja je bar dva puta veća od gornje granične učestanosti Ω_g kontinualnog signala, dok je u drugom slučaju jednaka $2\Omega_g$. U ova dva slučaja ne dolazi do preklapanja u spektru odmjera nog signala. Do preklapanja u spektru odmjera nog signala dolazi kada je učestanost odmjera vanja manja od $2\Omega_g$. Sa Slike 6.20 je jasno vidljivo da je idealna rekonstrukcija spektra kontinualnog signala, a samim tim i rekonstrukcija originalnog kontinualnog signala bez gubitaka, moguća ako je učestanost odmjera vanja dovoljno velika, tj. u slučajevima kada je $\Omega_s \geq 2\Omega_g$.

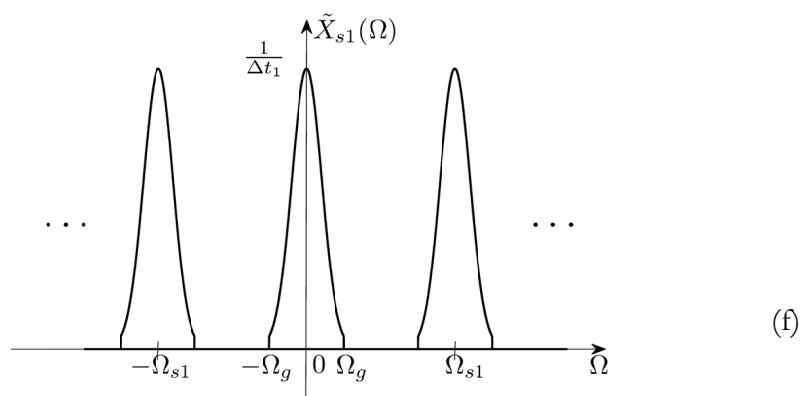
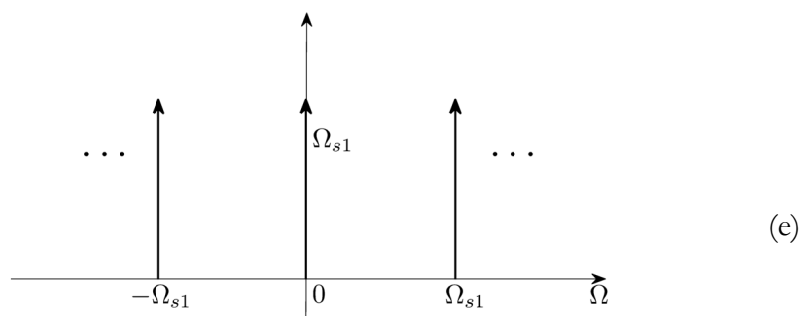
Ovaj uslov naziva se *Nikvistov kriterij*, a učestanost $\frac{\Omega_s}{2}$ se naziva *Nikvistova učestanost*.



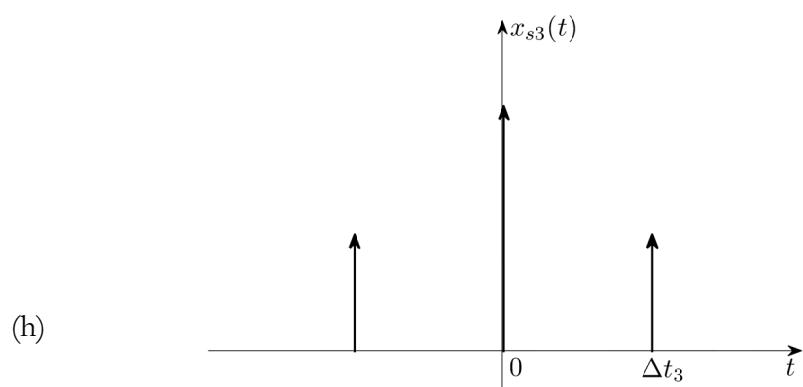
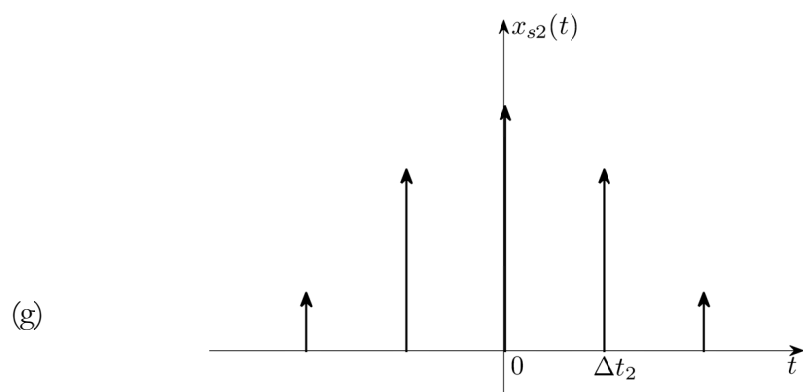
Slika 6.20 Odmjeravanje signala: (a) kontinualni signal; (b) povorka Dirakovih impulsa i (c) odmjereni signal, $\Delta t_1 = \frac{2\pi}{\Omega_{s1}}$ (nastavak na sljedećoj stranici);



$$\tilde{\delta}_1(\Omega) = \Omega_{s1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_{s1})$$

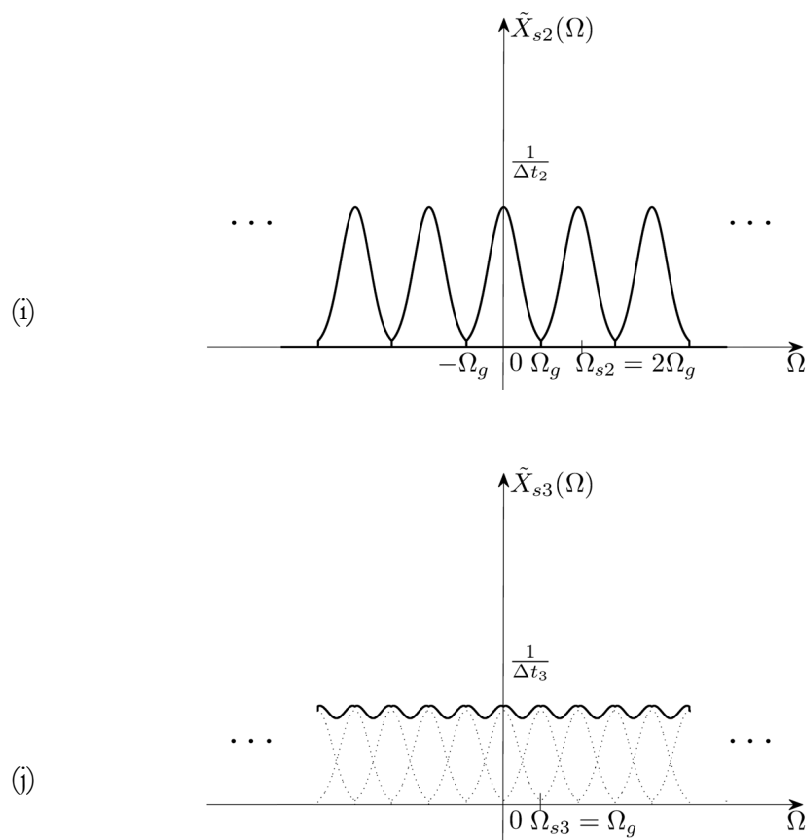


Slika 6.20 (nastavak): (d) amplitudni spektar signala $x(t)$; (e) Furijeova transformacija povorke Dirakovih impulsa i (f) amplitudni spektar odmjerenog signala, $\Omega_{s1} > 2\Omega_g$ (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 6.20 (nastavak): (g) odmjereni signal, $\Delta t_2 = \frac{2\pi}{\Omega_{s2}}$ i (h) odmjereni signal,

$$\Delta t_3 = \frac{2\pi}{\Omega_{s3}} \text{ (nastavak na sljedećoj stranici);}$$



Slika 6.20 (nastavak): (i) amplitudni spektar odmjerenog signala, $\Omega_{s2} = 2\Omega_g$ i
 (j) amplitudni spektar odmjerenog signala, $\Omega_{s3} < 2\Omega_g$.

6.8 Rekonstrukcija signala iz njegovih odmjeraka

Pretpostavimo da je prilikom odmjeravanja signala poštovan Nikvistov kriterij. Pokazaćemo da je pod tim uslovom moguća *idealna rekonstrukcija signala*. Prvo ćemo izdvojiti spektar kontinualnog signala iz spektra odmjeranog signala množenjem spektra odmjeranog signala sa tzv. prozorskom funkcijom $P(\Omega)$, koja je data na Slici 6.21(a).

Transformacioni par u vremenskom domenu ovoj prozorskoj funkciji $P(\Omega)$ je sinc funkcija:

$$p(t) = \text{sinc} \frac{\Omega_s}{2} t, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}, \quad (6.144)$$

prikazana na Slici 6.21(b), što se lako odredi koristeći osobinu simetrije Furijeove transformacije.

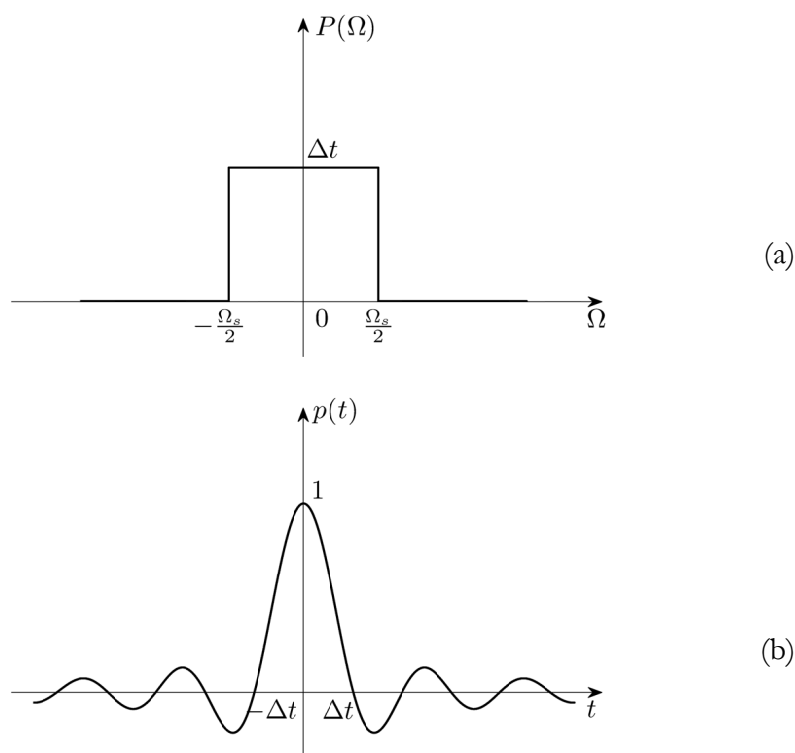
Množenju spektra odmjeranog signala sa prozorskom funkcijom u frekvencijskom domenu:

$$X(\Omega) = \tilde{X}_s(\Omega) \cdot P(\Omega), \quad (6.145)$$

odgovara konvolucija odmjeranog signala sa funkcijom $p(t)$ u vremenskom domenu:

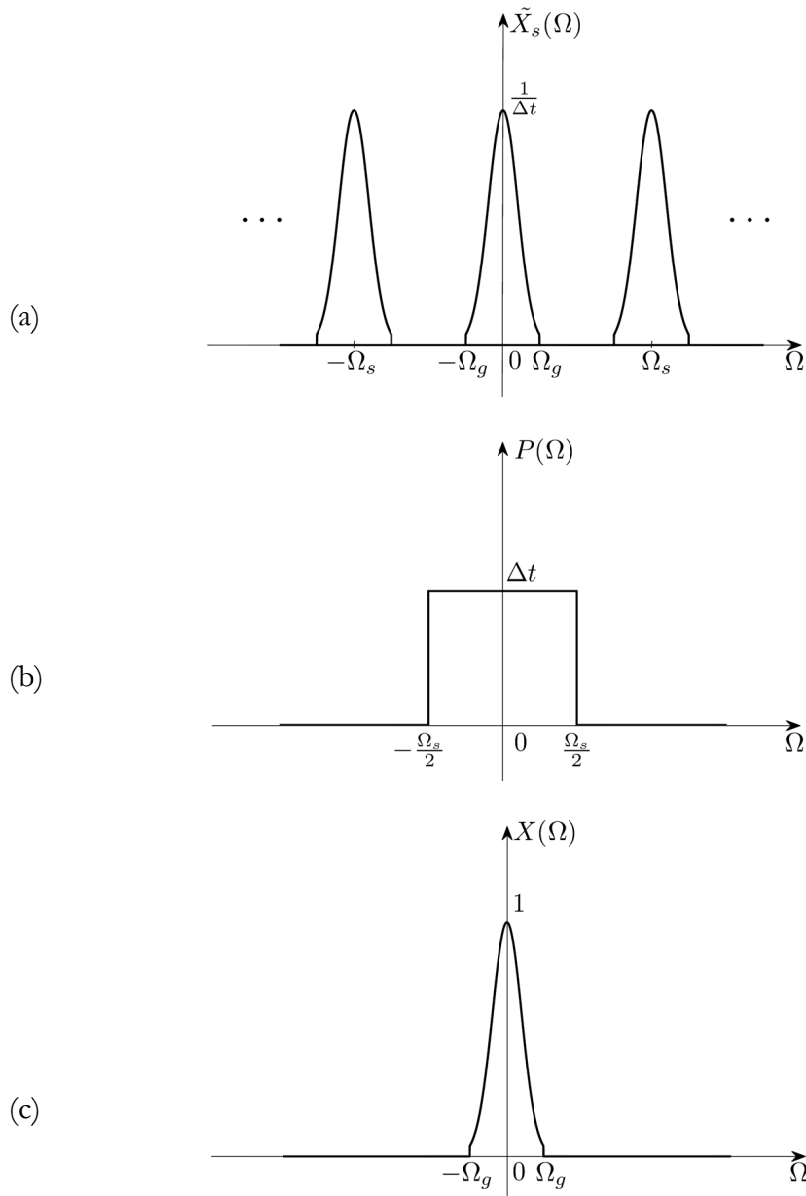
$$\begin{aligned} x(t) &= x_s(t) * p(t) = \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \right] * \text{sinc} \frac{\Omega_s}{2} t = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \text{sinc} \frac{\Omega_s}{2} (t - k\Delta t). \end{aligned} \quad (6.146)$$

Dakle, rekonstrukcija signala u vremenskom domenu se može posmatrati kao suma beskonačno mnogo sinc funkcija oblika (6.144), koje djeluju u trenucima $k\Delta t$ i čije su amplitude pomnožene sa vrijednostima signala u tačkama odabiranja, pogledati Sliku 6.22. Funkcija $p(t)$ data sa (6.144) omogućava rekonstrukciju kontinualnog signala iz njegovih odmjeraka bez greške, te se naziva *idealna interpolaciona funkcija*.

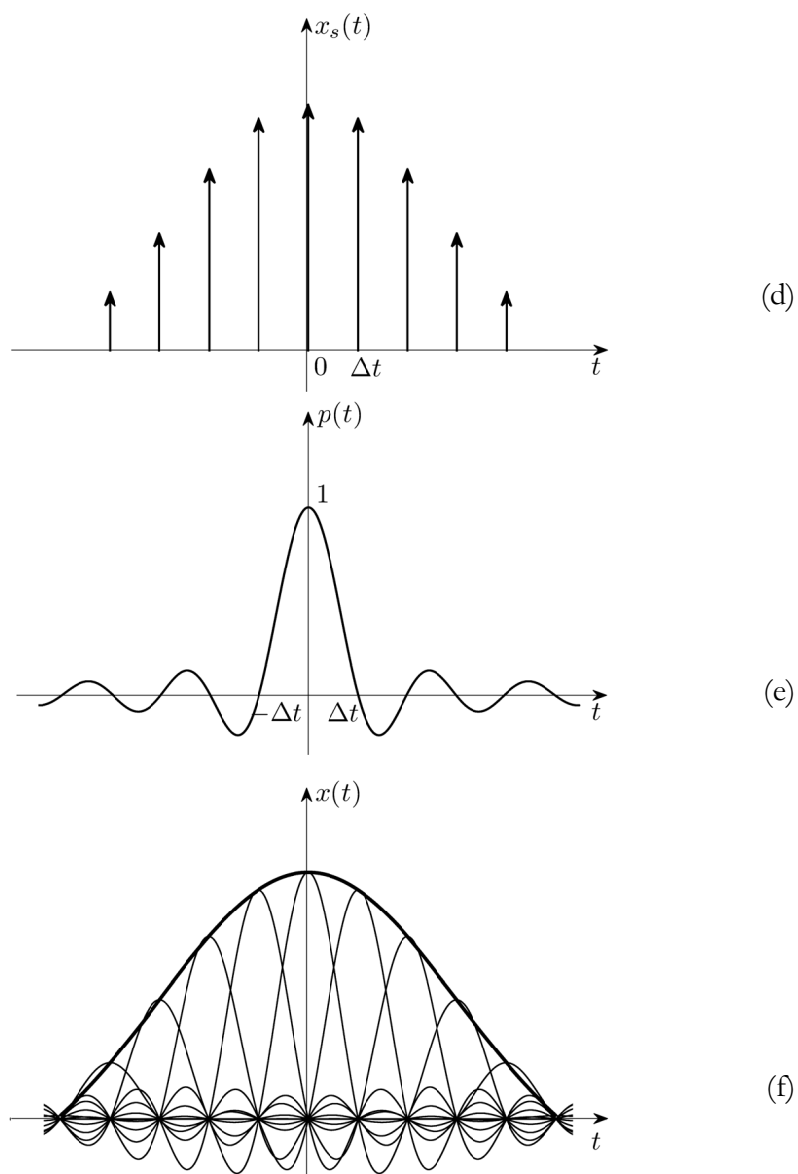


Slika 6.21 (a) Prozorska funkcija u frekvencijskom domenu i (b) idealna interpolaciona funkcija kao njen Furijeov transformacioni par u vremenskom domenu.

Primjetimo da je idealna interpolaciona funkcija nekauzalna. Zbog toga na vrijednost rekonstruisanog signala u nekom trenutku ne utiču samo vrijednosti odmjerača signala do tog i u tom trenutku, već i nakon posmatranog trenutka u kom se vrši rekonstrukcija, sve do beskonačnosti, pogledati Sliku 6.22(f). To onemogućava rekonstrukciju signala u realnom vremenu, tj. istovremeno sa pristizanjem informacija o odmjercima signala. Zbog problema uzrokovanih nekauzalnošću ove funkcije, u praksi se primjenjuju kauzalne interpolacione funkcije pomoću kojih se rekonstruiše približan oblik signala.



Slika 6.22 Idealna rekonstrukcija signala: (a) amplitudni spektar odmjereno^g signala; (b) prozorska funkcija i (c) amplitudni spektar kontinualnog signala dobijen kao proizvod $\tilde{X}_s(\Omega)$ i $P(\Omega)$ (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 6.22 (nastavak): (d) odmjereni signal; (e) idealna interpolaciona funkcija i (f) rekonstruisani kontinualni signal nacrtan debelom linijom, dok su tankim linijama nacrtane konvolucije pojedinačnih Dirakovih impulsa signala $x_s(t)$ sa idealnom interpolacionom funkcijom.

6.9 Gibsov fenomen

Prilikom rekonstrukcije signala množenje u frekvencijskom domenu uniformnom prozorskom funkcijom $P(\Omega)$, koja je različita od nule i jednaka jedinici samo za $|\Omega| \leq \Omega_0$, garantuje idealnu rekonstrukciju signala čija je gornja granična učestanost manja ili jednaka od Ω_0 . Ako bi širina prozorske funkcije bila manja, došlo bi do odsijecanja dijela spektra signala na učestanostima većim od Ω_0 . U slučaju signala sa diskontinuitetima, čiji spektar nije ograničen i prekriva cijeli frekvencijski opseg od $-\infty$ do ∞ beskonačno, odsijecanje visokofrekvencijskih komponenti je neminovno sve dok je širina prozorske funkcije konačna. Rekonstrukcija signala bez visokofrekvencijskih komponenti rezultuje aproksimativnim oblicima signala. Srednjekvadratna greška koja se čini pri rekonstrukciji signala se smanjuje sa povećanjem širine prozorske funkcije i teži ka nuli kada širina prozorske funkcije teži ka beskonačnosti. Međutim, pri rekonstrukciji signala koji sadrže diskontinuitete, iako srednjekvadratna greška postaje jako mala pri velikim širinama prozora, rekonstruisani signal se po svom obliku značajno razlikuje od originalnog signala i u njemu se pojavljuju karakteristični preskoci i oscilacije nazvani *Gibsov fenomen* (Josiah Willard Gibbs, 1839 –1903).

Ilustrovaćemo Gibsov fenomen na primjeru rekonstrukcije Hevisajdove funkcije iz njenog spektra. U svrhu rekonstrukcije, pomnožimo spektar Hevisajdove funkcije $U(\Omega)$ sa prozorskom funkcijom $P(\Omega)$ širine Ω_0 :

$$\hat{U}(\Omega) = U(\Omega) \cdot P(\Omega) = \begin{cases} U(\Omega), & |\Omega| \leq \Omega_0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \quad (6.147)$$

Inverznom Furijeovom transformacijom dobijamo:

$$\hat{u}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{U}(\Omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{U(\Omega) \cdot P(\Omega)\} = u(t) * \mathcal{F}^{-1}\{P(\Omega)\}. \quad (6.148)$$

Inverzna Furijeova transformacija prozorske funkcije dobije se koristeći pravilo simetrije:

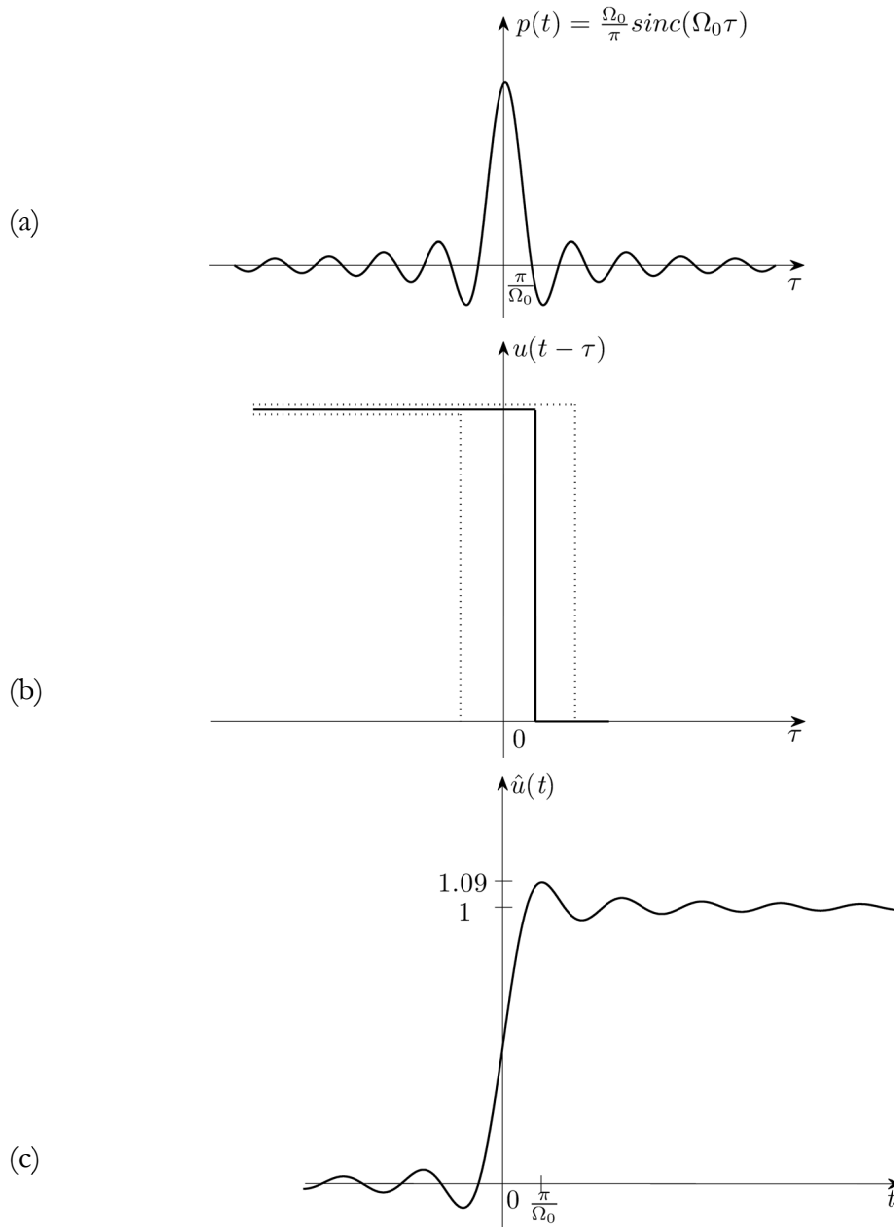
$$p(t) = \mathcal{F}^{-1}\{P(\Omega)\} = \frac{\Omega_0}{\pi} \text{sinc} \Omega_0 t, \quad (6.149)$$

tako da je rekonstruisana Hevisajdova funkcija jednaka:

$$\hat{u}(t) = u(t) * \frac{\Omega_0}{\pi} \text{sinc}(\Omega_0 t) = \frac{\Omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) \text{sinc}(\Omega_0 \tau) d\tau = \frac{\Omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^t \text{sinc}(\Omega_0 \tau) d\tau. \quad (6.150)$$

Numeričkom integracijom se može pokazati da maksimalna vrijednost ovog integrala nastupa za $t = \frac{\pi}{\Omega_0}$. Do ovog zaključka se može doći i posmatrajući grafičko rješavanje konvolucije Hevisajdove i sinc funkcije ilustrovano na Slici 6.23. Vidljivo je da se najveća površina ispod proizvoda ove dvije funkcije dobije kada se prednja ivica reflektovane Hevisajdove funkcije nađe u $t = \frac{\pi}{\Omega_0}$, što je prikazano punom linijom na Slici 6.23(b).

Maksimalna vrijednost $\hat{u}(t)$ je za 9% veća od vrijednosti Hevisajdove funkcije i ne zavisi od širine prozorske funkcije Ω_0 . Sa povećanjem širine prozorske funkcije u frekvencijskom domenu smanjuje se širina glavnog luka i razmak između nula sinc funkcije u vremenskom domenu, ali istovremeno, shodno osobini skaliranja Furijeove transformacije, proporcionalno raste njena amplituda. Zbog toga pri povećanju širine prozorske funkcije frekvencija oscilacija u rekonstruisanom signalu raste, povećava se strmina u okolini tačke gdje originalni signal ima prekid i preskok se pomjera prema tački prekida postajući sve uži, ali vrijednost maksimuma rekonstruisanog signala, koji odgovara površini ispod proizvoda Hevisajdove i sinc funkcije u trenutku $t = \frac{\pi}{\Omega_0}$ ostaje 1,09. I pored toga što pri povećanju frekvencijskog opsega na osnovu kog se vrši rekonstrukcija signala preskok ostaje iste visine, period oscilacija u rekonstruisanom signalu postaje sve kraći, tako da se srednjekvadratna greška sve više smanjuje. Za ilustraciju navedenog, na slikama 6.24 i 6.25 prikazan je Gibsov fenomen koji se javlja pri rekonstrukciji pravougaonog impulsa. Širina prozorske funkcije na Slici 6.25 je dva puta veća od širine prozorske funkcije na Slici 6.24, tako da se na ovim slikama može pratiti uticaj širine prozorske funkcije na oblik oscilacija koje se javljaju u rekonstruisanom signalu.



Slika 6.23 Rekonstrukcija Hevisajdove funkcije iz ograničenog spektra signala:
 (a) $p(t)$ - inverzna Furijeova transformacija prozorske funkcije;
 (b) pomjeranje reflektovane Hevisajdove funkcije pri određivanju
 konvolucije i (c) konvolucija Hevisajdove funkcije sa $p(t)$.

6.10 Hilbertova transformacija

Za kauzalni signal moguće je uspostaviti vezu između realnog i imaginarnog dijela njegove Furijeove transformacije. Da bismo to pokazali, pođimo od činjenice da svaki kauzalan signal, koji je jednak nuli za $t < 0$, možemo zapisati na sljedeći način:

$$x(t) = x(t) \cdot u(t). \quad (6.151)$$

Množenju dva signala u vremenskom domenu odgovara konvolucija njihovih Furijeovih transformacija u frekvencijskom domenu, pa dobijamo:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot u(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * U(\Omega), \quad (6.152)$$

gdje je $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ i $U(\Omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$. Sada je:

$$\begin{aligned} X(\Omega) = R(\Omega) + jI(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} [R(\Omega) + jI(\Omega)] * \left[\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right] = \\ &= \frac{1}{2} R(\Omega) * \delta(\Omega) + \frac{1}{2\pi} I(\Omega) * \frac{1}{\Omega} + j \left[\frac{1}{2} I(\Omega) * \delta(\Omega) - \frac{1}{2\pi} R(\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right]. \end{aligned} \quad (6.153)$$

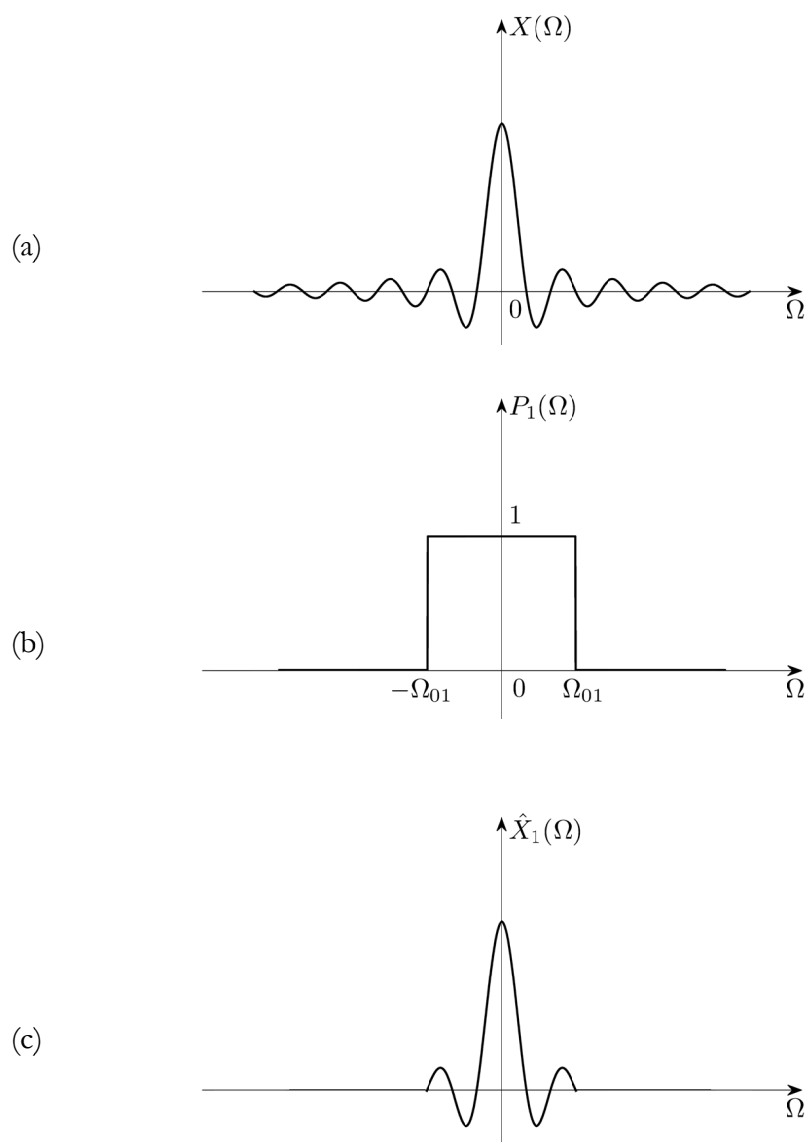
Na osnovu (4.31) znamo da je konvolucija signala sa Dirakovim impulsom pomjerenim u tačku t_0 jednaka tom signalu pomjerenom u tačku t_0 . Zbog toga su konvolucije sa Dirakovim impulsima u (6.153) jednake:

$$R(\Omega) * \delta(\Omega) = R(\Omega), \quad (6.154)$$

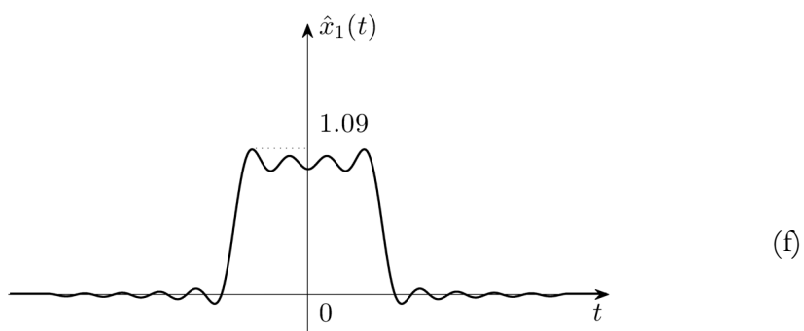
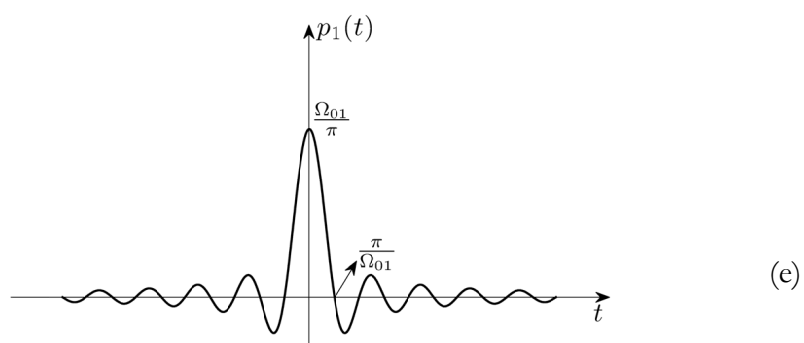
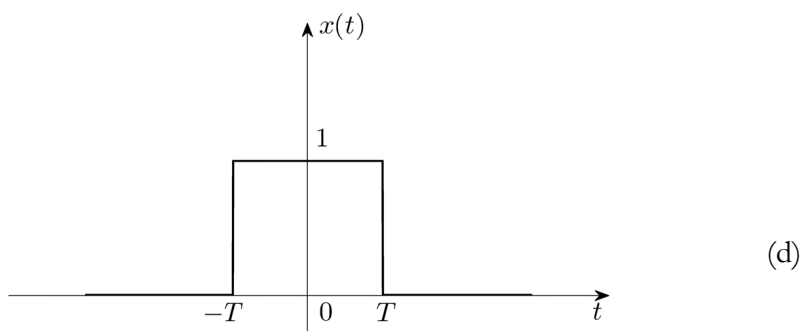
$$I(\Omega) * \delta(\Omega) = I(\Omega). \quad (6.155)$$

Tako dobijamo da je:

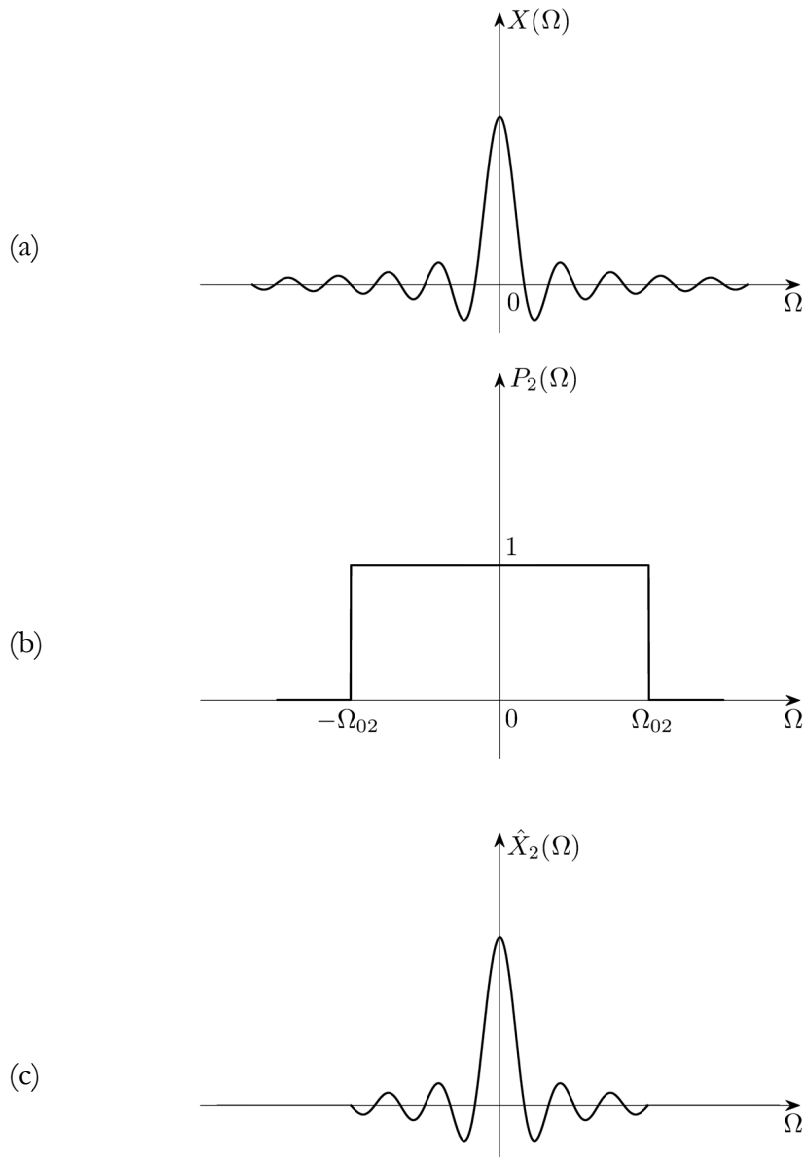
$$R(\Omega) + jI(\Omega) = \frac{1}{2} R(\Omega) + \frac{1}{2\pi} I(\Omega) * \frac{1}{\Omega} + j \left[\frac{1}{2} I(\Omega) - \frac{1}{2\pi} R(\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right]. \quad (6.156)$$



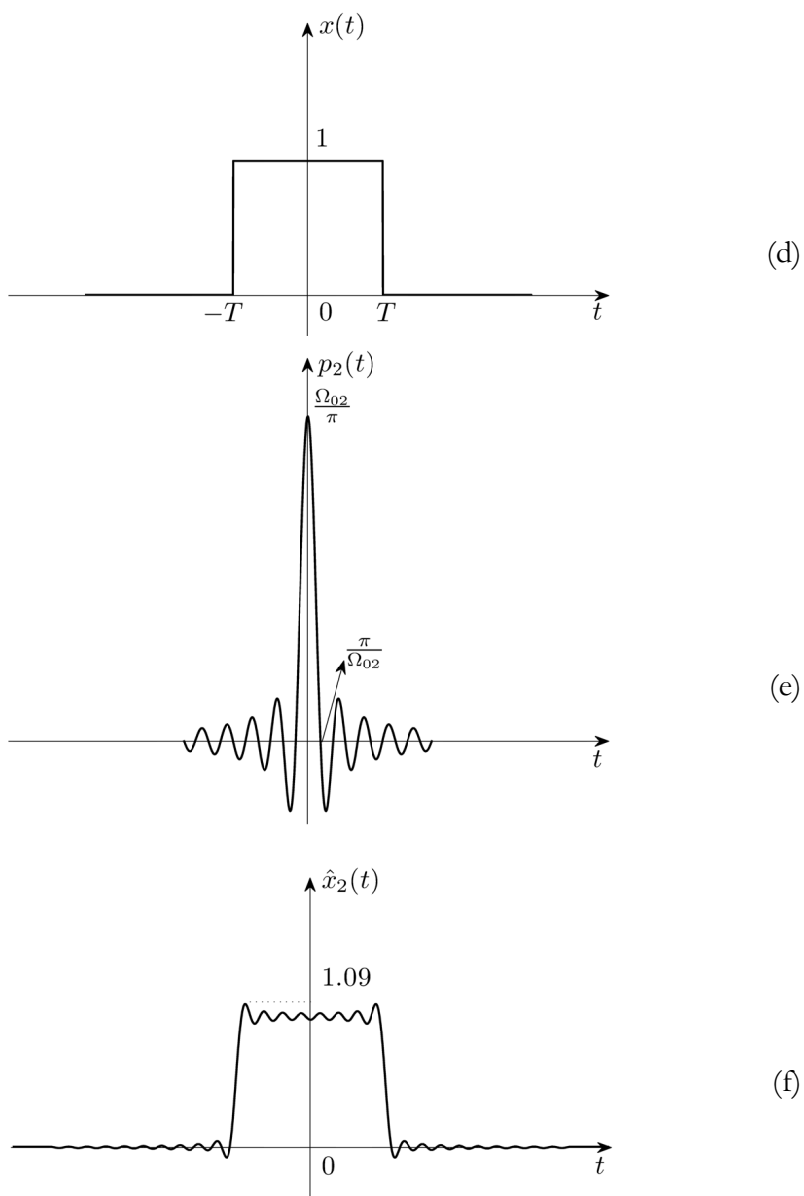
Slika 6.24 Gibsov fenomen (frekvencijski domen): (a) amplitudni spektar originalnog signala; (b) prozorska funkcija širine $2\Omega_{01}$ i (c) proizvod amplitudnog spektra signala i prozorske funkcije.



Slika 6.24 Gibsov fenomen (vremenski domen): (d) originalni signal; (e) $p_1(t)$ - inverzna Furijeova transformacija prozorske funkcije širine $2\Omega_{01}$ i (f) konvolucija originalnog signala sa $p_1(t)$.



Slika 6.25 Gibsov fenomen (frekvencijski domen): (a) amplitudni spektar originalnog signala; (b) prozorska funkcija širine $2\Omega_{02} = 4\Omega_{01}$ i (c) proizvod amplitudnog spektra signala i prozorske funkcije.



Slika 6.25 Gibsov fenomen (vremenski domen): (d) originalni signal; (e) $p_2(t)$ - inverzna Furijeova transformacija prozorske funkcije širine $2\Omega_{02} = 4\Omega_{01}$ i (f) konvolucija originalnog signala sa $p_2(t)$.

Razdvajajući realne i imaginarne dijelove (6.155), zaključujemo da realni i imaginarni dio Furijeove transformacije kauzalne funkcije možemo izraziti na sljedeći način:

$$R(\Omega) = \frac{1}{\pi} I(\Omega) * \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\Psi)}{\Omega - \Psi} d\Psi, \quad (6.157)$$

$$I(\Omega) = -\frac{1}{\pi} R(\Omega) * \frac{1}{\Omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\Psi)}{\Omega - \Psi} d\Psi. \quad (6.158)$$

Dvije prethodne relacije uspostavljaju vezu između realnog i imaginarnog dijela Furijeove transformacije kauzalnog signala, te kažemo da realni i imaginarni dio Furijeove transformacije kauzalnog signala obrazuju *Hilbertov transformacioni par* dat sa (6.157) i (6.158). To znači da je za rekonstrukciju kauzalnog signala dovoljno poznavati samo realni ili imaginarni dio njene Furijeove transformacije, jer se pomoću Hilbertove transformacije rekonstruiše nepoznati imaginarni, odnosno realni dio Furijeove transformacije.